oki neswan FMIPA-ITB

Integral Ganda

Pengertian Integral Ganda

Integral ganda $\iint_D f(x,y)\,dA$ adalah perumuman dari integral $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx$. Misalkan D adalah daerah yang berada dalam persegi panjang $[a,b]\times[c,d]$. Misalkan P adalah partisi dari persegi panjang yang ditentukan oleh partisi $P_x = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ dari $[a,b]$ dan $P_y = \{c = y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m = d\}$ dari $[c,d]$. Maka P menghasilkan persegi-persegi panjang

$$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, yj] = R_{ij}$$

yang luasnya adalah

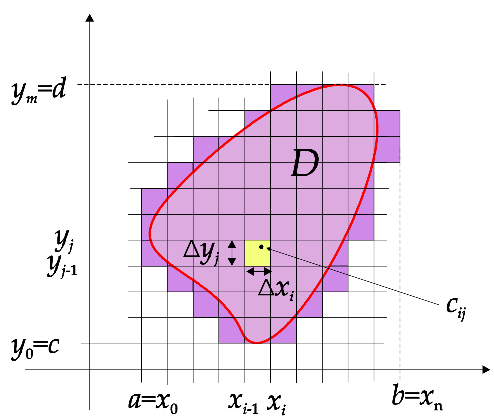
$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Maka untuk tiap R_{ij} beririsan dengan D, pilih

$$c_{ij} = (\hat{x}_i, \hat{y}_j) \in D \cap R_{ij}.$$

Misalkan $\sigma = \{c_{ij}\}$. Diperoleh jumlah Riemann atas semua i dan j di mana $D \cap R_{ij} \neq \emptyset$

$$R(f,P,\sigma) = \sum_{D\cap R_{ij}\neq\emptyset} f(c_{ij})\,\Delta x_i \Delta y_j = \sum_{D\cap R_{ij}\neq\emptyset} f(\hat{x}_i,\hat{y}_j)\,\Delta x_i \Delta y_j = \sum_{D\cap R_{ij}\neq\emptyset} f(\hat{x}_i,\hat{y}_j)\,\Delta A_{ij}$$



Misalkan $\|P\| = \max\{\Delta A_{ij}\}$. Maka f disebut terintegral atas D jika

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{D\cap R_{ij}\neq\emptyset} f(\hat{x}_i,\hat{y}_j)\,\Delta A_{ij} \text{ ada.}$$

Nilai limit ini disebut integral ganda f atas D, yaitu

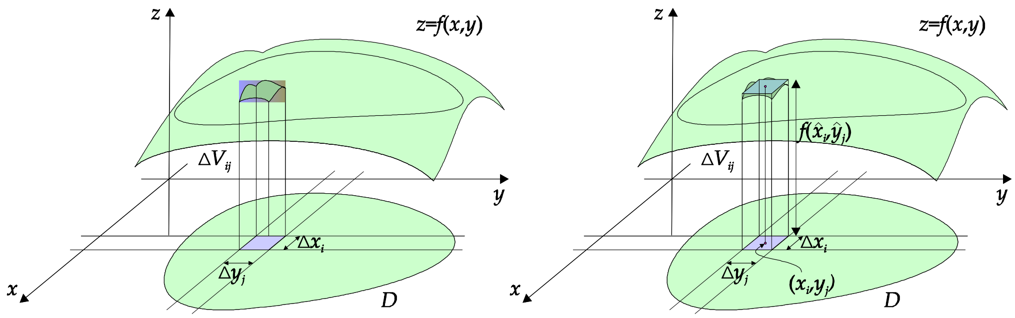
$$\boxed{\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{D\cap R_{ij}\neq\emptyset} f(\hat{x}_i,\hat{y}_j)\,\Delta A_{ij} = \iint_D f(x,y)\,dA}$$

Khususnya, jika $f(x,y) \geq 0$ pada D, maka masing-masing

$$f(\hat{x}_i,\hat{y}_j)\,\Delta A_{ij}$$

merupakan hampiran volume benda padat, ΔV_{ij}, antara permukaan $z = f(x,y)$ dan persegi panjang $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, yaitu

$$\Delta V_{ij} \approx f(\hat{x}_i,\hat{y}_j)\,\Delta A_{ij}$$



Dengan demikian,

$$R(f,P,\sigma)=\sum_{D\cap R_{ij}\neq\emptyset} f(\hat{x}_i,\hat{y}_j)\,\Delta A_{ij}\approx\sum\Delta V_{ij}=V$$

yaitu $R(f,P,\sigma)$ memberikan hampiran volume benda dibawah permukaan $z=f(x,y)$ di atas daerah D. Jadi, jika f terintegral pada D,

$$V=\iint_D f(x,y)\,dA$$

Integral Teriterasi: Teorema Fubini

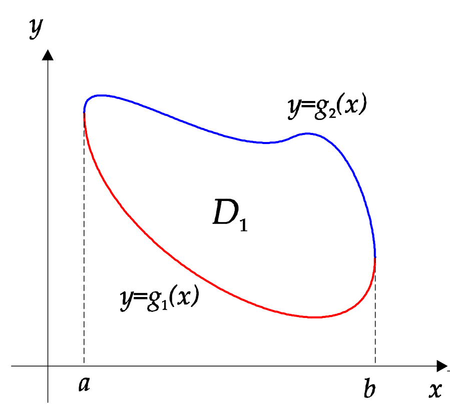
Sebuah himpunan bagian D_1 dari $\mathbb{R}^2$ disebut y-simple (sederhana-y) jika dapat ditulis sebagai

$$D_1=\{(x,y):a\leq x\leq b,g_1(x)\leq y\leq g_2(x)\},\quad g_1(y),g_2(y)\ \text{kontinu pada}\ [c,d]$$

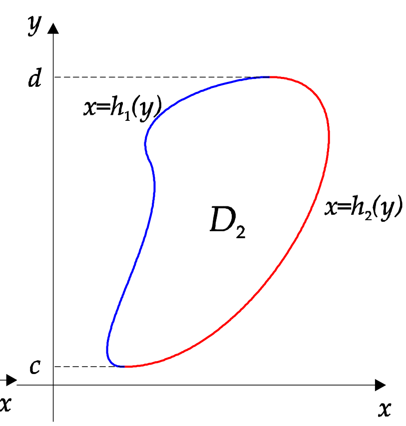
Sementara himpunan berikut

$$D_2=\{(x,y):c\leq y\leq d,h_1(y)\leq x\leq h_2(y)\},\quad h_1(y),h_2(y)\ \text{kontinu pada}\ [c,d].$$

dikatakan x-simple (sederhana-x).



Daerah sederhana-y



Daerah sederhana-x

Integral yang akan dibahas adalah integral atas daerah yang merupakan gabungan berhingga himpunan yang sederhana-x atau sederhana-y. dengan $g_1(x),g_2(x)$ kontinu pada $[a,b]$, dan $h_1(y),h_2(y)$ kontinu pada $[c,d]$. Integral atas daerah yang sederhana-x atau sederhana-y dapat dihitung dengan menggunakan Teorema Fubini. Perlu dicatat bahwa sebuah daerah bisa saja sederhana-x dan juga sederhana-y. Contohnya daerah di dalam lingkaran $x^2+y^2=1$

$$\left\{(x,y):-1\leq x\leq 1,-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\right\}=\left\{(x,y):-1\leq y\leq 1,-\sqrt{1-y^2}\leq x\leq\sqrt{1-y^2}\right\}$$

Theorem 1 (Teorema Fubini) *Misalkan D_1 dan D_2 masing-masing himpunan sederhana-y dan sederhana-x.*

1. *Jika $f(x,y)$ kontinu pada D_1, maka*

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

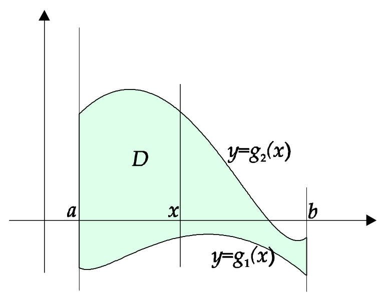
2. *Jika $f(x,y)$ kontinu pada D_2, maka*

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

Langkah pertama dalam menggunakan Teorema Fubini untuk menentukan integral ganda adalah menentukan kedua fungsi $g_1(x)$ dan $g_2(x)$.

Misalkan daerah sederhana-y terletak antara garis vertikal $x = a$ dan $x = b$. buat garis vertikal melalui tiap $x, a \leq x \leq b$. Kemudian tentukan persamaan kedua kurva yang dipotong oleh garis x. Misalkan $g_1(x)$ dan $g_2(x)$ berturut-turut adalah persamaan kurva batas bawah dan batas atas D. Maka

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

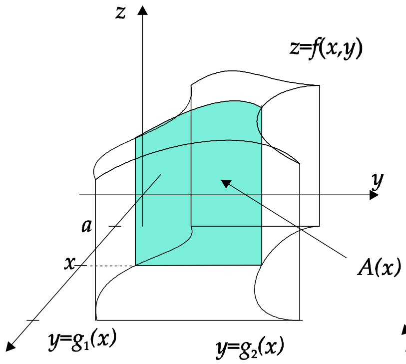


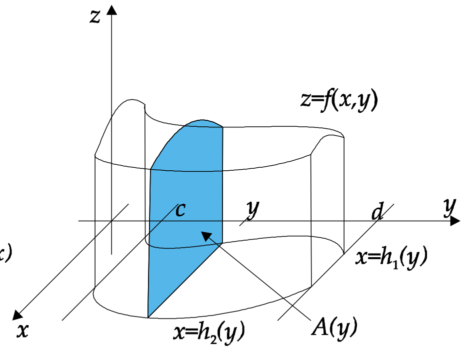
Dengan cara serupa, untuk daerah sederhana-x, terletaj antara garis horizontal $y = c$ dan $y = d$. untuk tiap $y, c \leq y \leq d$, buat garis horizontal melalui y. Dari kiri kekanan, misalkan $h_1(y)$ dan $h_2(y)$ berturutu-turut adalah persamaan kurva batas kiri dan kana atas D. Maka

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx\right] dyn$$

Pada integral ganda $\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dA$ di atas, $A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$ dapat dipandang sebagai "luas penampang" seperti pada gambar di bawah. Tentu saja dalam situasi umum, $A(x)$ dapat bernilai negatif.

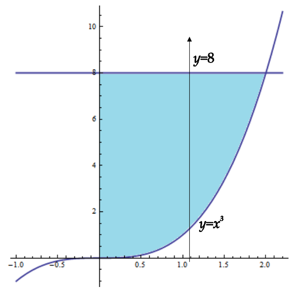
Akan tetapi cara pandang ini sangat membantu kita memahami bahwa jika $f(x,y) \geq 0$, maka integral ini akan memberikan volume benda pejal dibawah permukaan $z = f(x,y)$ dan di atas daerah D_1. Artinya, jika kita mengetahui luas penampang benda pejal S, maka kita dapat menentukan volumenya. Tentu saja interpretasi serupa juga berlaku untuk integral ganda $\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dA$.





Jadi, $f(x,y) \geq 0$ untuk tiap $(x,y) \in D$ dan terintegral, maka volume benda antara $z = f(x,y)$ dan daerah D adalah $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dA$.

CONTOH Misalkan R adalah daerah yang dibatasi oleh sb-y, garis $y = 8$, dan $y = x^3$. Gunakan interal ganda untuk menentukan luas R, baik dengan $dxdy$ maupun $dydx$.



Sebagai himpunan sederhana-y,

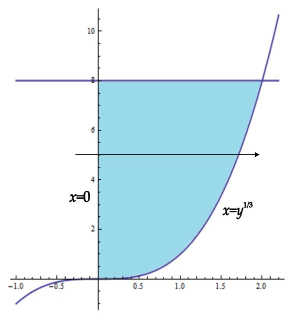
$$R = \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, x^3 \leq y \leq 8\right\}.$$

Maka luas daerah L adalah

$$L = \iint_R dA = \int_0^2 \int_{x^3}^8 dydx = \int_0^2 y\big]_{x^3}^8\, dx = \int_0^2 \left(8 - x^3\right) dx = 8x - \frac{x^4}{4}\bigg]_0^2 = 12$$

Sedangkan sebagai himpunan sederhana-x,

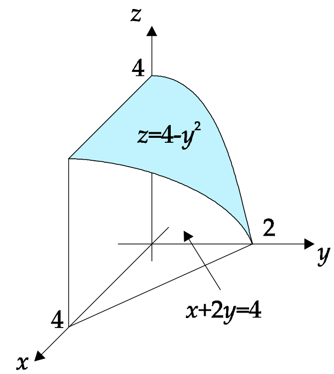
$$R = \left\{(x,y) : 0 \leq y \leq 8, 0 \leq x \leq y^{\frac{1}{3}}\right\}.$$



Maka

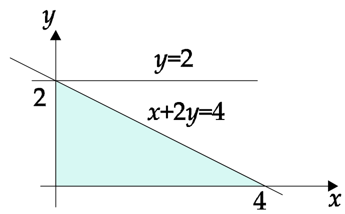
$$L = \iint_R dA = \int_0^8 \int_0^{y^{\frac{1}{3}}} dxdy = \int_0^8 x\big]_0^{y^{\frac{1}{3}}}\, dy = \int_0^8 y^{\frac{1}{3}}\, dy = \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}}\bigg]_0^8 = 12.$$

CONTOH Misalkan S adalah benda pejal pada oktan pertama yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat, bidang $x + 2y = 4$, dan silinder parabolik $z = 4 - y^2$. Tentukan volume S.



Pertama kita tentukan dulu daerah pada bidang XY yaitu bidang $z = 0$. Pada bidang ini, silinder parabolik memberikan $0 = 4 - y^2$ atau $y = \pm 2$. Diperoleh dua garis $y = 2$ dan $y = -2$. Karena benda berada pada oktan pertama, maka hanya $y = 2$ yang digunakan. sedang bidang $x + 2y = 4$ memberikan garis $x + 2y = 4$. Jadi diperoleh segitiga

$$T = \{(x, y) : 0 \le y \le 2, 0 \le x \le 4 - 2y\}$$



Maka volume adalah

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_0^{4-2y} \left(4 - y^2\right) dx dy = \int_0^2 \left(4x - xy^2 \Big]_0^{4-2y} \right) dy = \int_0^2 \left(4(4 - 2y) - (4 - 2y) y^2\right) dy \\ &= \int_0^2 \int \left(2y^3 - 4y^2 - 8y + 16\right) dy = \frac{1}{2}y^4 - \frac{4}{3}y^3 - 4y^2 + 16y \Big]_0^2 \\ &= \frac{40}{3} \end{aligned}$$

Sebaliknya, dengan memandang T sebagai himpunan sederhan-x,

$$T = \left\{(x, y) : 0 \le x \le 4, 0 \le y \le \frac{4 - 2x}{2}\right\},$$

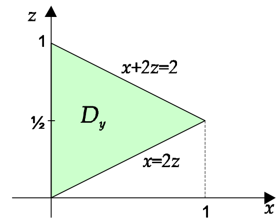
maka

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} \left(4 - y^2\right) dy dx = \int_0^4 \left(4y - \frac{y^3}{3} \Big]_0^{2-\frac{x}{2}} \right) dx \\ &= \int_0^4 \left(4\left(2 - \frac{x}{2}\right) - \frac{\left(2 - \frac{x}{2}\right)^3}{3} \right) dx = \int_0^4 \left(8 - 2x - \left(-\frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{8}{3} \right) \right) dx \\ &= 8x - \frac{x^2}{2} - \left(-\frac{1}{96}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{8}{3}x \right) \Big]_0^4 = \frac{40}{3} \end{aligned}$$

CONTOH Tentukan volume tetrahedron yang dibatasi oleh bidang-bidang $x + 2z + y = 2, x = 2z, x = 0$ dan $y = 0$.

Contoh ini akan dikerjakan dalam tiga cara:

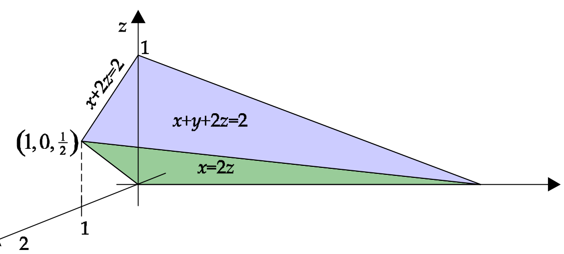
1. Irisan bidang $x + 2z + y = 2, x = 2z$, dengan bidang $y = 0$ adalah garis-garis $x + 2z = 2$ dan $x = 2z$. Kedua garis ini berpotongan di $x = 1$. Jadi, pada bidang XOZ, diperoleh segitiga D_y yang dibatasi oleh garis-garis $x + 2z = 2$, $x = 2z$, dan sb-z.



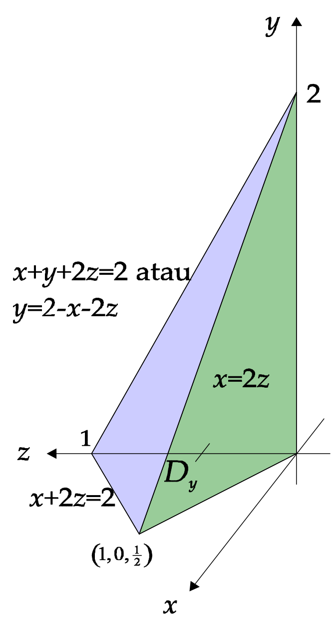
Sebagai daerah sederhana-z, D_y dapat dinyatakan sebagai

$$D_y = \left\{ (x, z) : 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{2} \leq z \leq \frac{2-x}{2} \right\}.$$

Gambar benda adalah



Agar lebih mudah, maka sebagai bidang datar digunakan bidang yang memuat D_y yaitu bidang $y = 0$ atau bidang-xz. Maka diperoleh gambar berikut.



Benda ini dapat dipandang sebagai benda yang berada antara alas ($y = 0$) dan $y = 2 - x - 2z$ pada daerah D_y.Maka volume adalah

$$V = \iint\limits_{D_y} (2-x-2z)\,dzdx = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} (2-x-2z)\,dzdx = \int_0^1 \left.(2-x)\,z - z^2\right]_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} dx$$

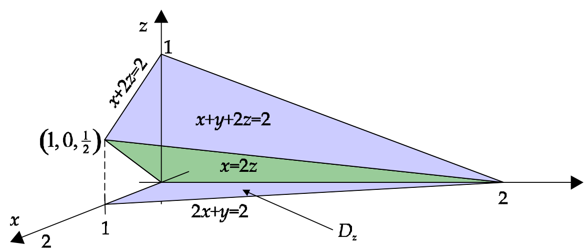
$$= \int_0^1 \left.(2-x)\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right) - \left(1-\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right]_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} dx$$

$$= \int_0^1 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}$$

Sebagai latihan, pandang D_y sebagai daerah sederhana-x, kemudian tentukan volume benda.

2. Sebagai alternatif, benda dapat dipandang di batasi dibawah oleh $z = \frac{x}{2}$ dan di atas oleh $z = \frac{2-x-y}{2} = 1 - \frac{y}{2} - \frac{x}{2}$, pada daerah

$$D_z = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2-2x\}$$



Maka

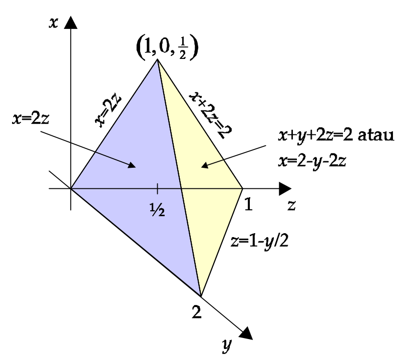
$$V = \iint\limits_{D_z} \left(\left(1-\frac{y}{2}-\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}\right) dydx = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left(\left(1-\frac{y}{2}-\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}\right) dydx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left(1-\frac{y}{2}-x\right) dydx = \int_0^1 \left.\left(y-\frac{y^2}{4}-xy\right)\right]_0^{2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}$$

3. Alternatif lain adalah menghitung volume dengan integral ganda terhadap $dzdy$.

Agar lebih mudah memahaminya, maka bidang $x=0$ atau bidang-yz digambar sebagai bidang datar.



Bidang $x+y+2z=2$ memotong bidang $x=0$ (atau bidang-yz) pada garis $y+2z=2$ atau $z = 1-\frac{y}{2}$ Jadi, diperoleh segitiga D_x,

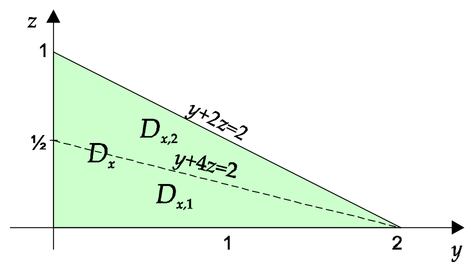
$$D_x = \left\{(y,z) : 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1-\frac{y}{2}\right\}.$$

Bidang $x+y+2z=2$ dan $x=2z$ berpotongan pada sebuah garis yang persamaannya ditentukan dengan menyelesaikan persamaan

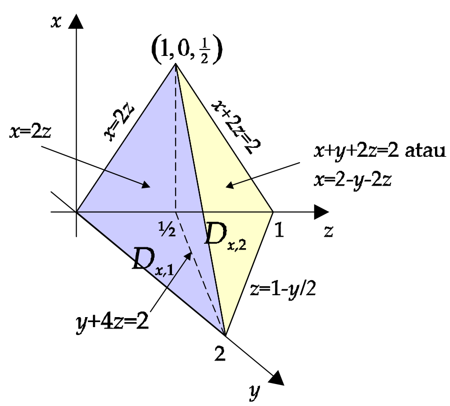
$$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ x=2z \end{cases}.$$

Substitusi $x=2z$ pada $x+y+2z=2$ menghasilkan $2z+y+2z=2$ atau $y+4z=2$ atau $z=\frac{1}{2}-\frac{y}{4}$. Maka D_x dibagi dua oleh garis $z=\frac{1}{2}-\frac{y}{4}$, $D_x=D_{x,1}\cup D_{x,2}$, dengan

$$D_1=\left\{(y,z): 0\le y\le 2, 0\le z\le \frac{1}{2}-\frac{y}{4}\right\}$$
$$D_2=\left\{(y,z): 0\le y\le 2, \frac{1}{2}-\frac{y}{4}\le z\le \frac{2-y}{2}\right\}$$



Dengan demikian dibawah garis $z=\frac{1}{2}-\frac{y}{4}$, batas atas benda adalah bidang $x=2z$. Sementara itu, diatas garis $z=\frac{1}{2}-\frac{y}{4}$, batas bawah benda adalah bidang $x+y+2z=2$ atau $x=2-y-2z$.



Maka

$$V=\iint\limits_{D_1} 2z\,dz\,dy+\iint\limits_{D_2}(2-y-2z)\,dz\,dy=\int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{y}{4}}2z\,dz\,dy+\int_0^2\int_{\frac{1}{2}-\frac{y}{4}}^{1-\frac{y}{2}}(2-y-2z)\,dz\,dy$$

$$=\int_0^2 z^2\Big]_0^{\frac{1}{2}-\frac{y}{4}}dy+\int_0^2\left((2-y)z-\frac{z^2}{2}\right)\Bigg]_{\frac{1}{2}-\frac{y}{4}}^{1-\frac{y}{2}}dy$$

$$=\int_0^2\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{4}\right)^2dy+\int_0^2\left[\left((2-y)\left(1-\frac{y}{2}\right)-\frac{\left(1-\frac{y}{2}\right)^2}{2}\right)-\left((2-y)\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{4}\right)-\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{4}\right)^2}{2}\right)\right]dy$$

$$=\frac{1}{4^2}\int_0^2(2-y)^2\,dy+\int_0^2\left(\frac{5}{32}y^2-\frac{5}{8}y+\frac{5}{8}\right)dy=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

Exercise 2 *Sebagai latihan tentukan volume benda yang dibatasi oleh bidang-bidang* $x+2z+y=2, 2x+y-4z=0, x=0$ *dan* $y=0$.