oki neswan FMIPA-ITB

Linear Lokal = Mempunyai Turunan

Definisi turunan fungsi untuk dua peubah tampak sangat berbeda dari turunan untuk fungsi satu peubah

Definition 1 *Fungsi $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, dikatakan mempunyai turunan di $x = a$ jika limit*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1}$$

ada. Nilai limit tersebut disebut turunan dari f di a, ditulis $f'(a)$. Jadi,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Definition 2 *Fungsi $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$, dikatakan mempunyai turunan di (a, b) jika limit f linear lokal di (a, b), yaitu jika terdapat fungsi $\varepsilon_1(x, y)$ dan $\varepsilon_2(x, y)$ sehingga*

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta x + \Delta x\ \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) + \Delta y\ \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$$

dan

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0 \text{ dan } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Pertanyaan yang sangat wajar muncul mengapa tidak dipilih definisi yang lebih mudah, misalnya f mempunyai turunan di (a, b) jika turunan-turunan parsial $f_x(a, b)$ dan $f_y(a, b)$? Kita menginginkan fungsi dua peubah yang mempunyai turunan juga mempunyai sifat yang sama seperti yang dimiliki oleh fungsi satu peubah, **misalnya**

1. fungsi yang mempunyai turunan adalah kontinu dan juga bahwa
2. dalil rantai berlaku pada komposisi dar fungsi-fungsi yang mempunyai turunan.

Kita perlu membangun definisi yang cukup kuat sehingga sifat-sifat ini, dan tentu juga sifat-sifat lainnya juga sebanyak mungkin dapat berlaku pada fungsi dengan dua peubah atau lebih.

Contoh berikut menjelaskan mengapa memiliki turunan parsial saja tidak cukup.

Example 3 *Perhatikan fungsi*

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jika } x = 0 \text{ atau } y = 0 \\ 1, & \text{jika } x \neq 0 \text{ dan } y \neq 0 \end{cases}$$

Fungsi ini jelas tidak kontinu sekalipaun $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$.

Pertanyaan lainnya adalah mengapa kita tidak memperumum limit (1) untuk mendefinisikan turunan?

Bentuk Lain dari Turunan

Misalkan $\mathbf{x} = (x, y)$ dan $\mathbf{x}_0 = (a, b)$. Bila kita secara langsung menggunakan hubungan (1) diperoleh

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}.$$

Tetapi ekspresi ini tidak mempunyai makna karena pembagian oleh vektor yaitu $\frac{1}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}$ sama sekali tidak mempunyai makna. Jadi, kita perlu mencari bentuk lain yang ekuivalen dengan (1) tanpa melibatkan pembagian.

Misalkan limit $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ini ada yaitu L $(L=f'(a))$. Maka

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-L=0 \text{ atau } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}-L=0$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)-L\Delta x}{\Delta x}=0$$

Misalkan $\varepsilon(\Delta x)=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)-L(x-a)}{\Delta x}$. Maka

$$f(a+\Delta x)=f(a)+L(\Delta x)+\varepsilon(\Delta x)\,\Delta x.$$

Dengan demikian jika f mempunyai turunan maka

terdapat bilangan real L dan fungsi $\varepsilon(\Delta x)$ yang bersifat $\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$, sehingga $f(a+\Delta x)=f(a)+L(\Delta x)+\varepsilon(\Delta x)\,\Delta x$. (bentuk alternatif)

Sebaliknya jika bentuk alternatif ini berlaku, maka

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} &= \lim_{x\to a}\frac{L\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\,\Delta x}{\Delta x}\\ &= \lim_{x\to a}(L+\varepsilon(\Delta x))=L+\lim_{x\to a}\varepsilon(\Delta x)\\ &= L+0=L.\end{aligned}$$

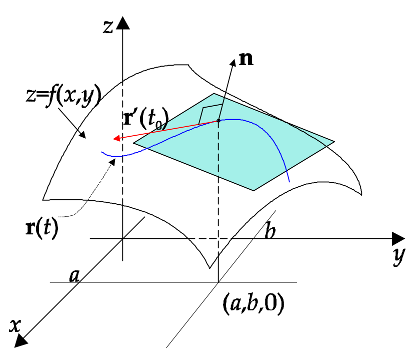
yaitu f mempunyai turunan. Nilai L disebut turunan dari f di a, $L=f'(a)$. Jadi keduanya ekuivalen. Karena bentuk alternatif tidak melibatkan pembagian maka kita dapat menggunakannya untuk mendefinisikan turunan untuk fungsi dengan dua peubah atau lebih.

Perhatikan bahwa $g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ adalah persamaan garis singgung grafik $f(x)$ di $x=a$. Dengan demikian $f(x)$ disekitar a mirip $g(x)$, biasa disebut, f linear lokal di a. Jadi sebagaimana telah diperlihatkan diatas, konsep mempunyai turunan dan linear lokal adalah ekuivalen pada fungsi satu peubah,

Kita akan menggunakan konsep linear lokal untuk fungsi dua peubah, yaitu f mempunyai turunan di (a,b) nilai f dapat dihampiri oleh sebuah bidang, disebut bidag singgung.

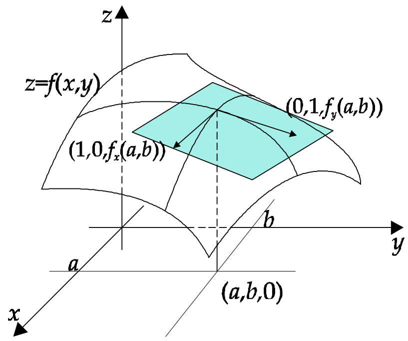
Bidang Singgung

Misalkan sebuah permukaan memenuhi persamaan $F(x,y,z)=0$. (bidang dengan persamaan $z=f(x,y)$ dapat ditulis sebagai $F(x,y,z)=0$, dengan $F(x,y,z)=f(x,y)-z$) Bidang singgung permukaan di titik $P(a,b,c)$ bidang melalui titik P sehingga tiap kurva $\mathbf{r}(t)=(r_1(t),r_2(t),r_3(t))$ pada permukaan, vektor singgung $\mathbf{r}'(t_0)$ $(P=\mathbf{r}(t_0))$ tegak lurus normal bidang tersebut.



Sepanjang garis $y=b$, kita peroleh kurva ruang $\mathbf{r}_b(x)=(x,b,f(x,b))$. Untuk $x=a$, kita peroleh kurva ruang $\mathbf{r}_a(x)=(a,y,f(a,y))$.. Maka

$$\mathbf{r}_b'(x)=(1,0,f_x(x,b)).\text{ Khususnya, }\mathbf{r}_b'(a)=(1,0,f_x(a,b))$$
$$\mathbf{r}_a'(y)=(0,1,f_y(y,b)).\text{ Khususnya, }\mathbf{r}_a'(b)=(1,0,f_y(a,b))$$



Maka, $\mathbf{r}_b'(a) \times \mathbf{r}_a'(b)$ merupakan vektor normal bidang singgung.

$$\mathbf{r}_b'(a) \times \mathbf{r}_a'(b) = (1, 0, f_x(a,b)) \times (1, 0, f_y(a,b)) = (f_x(a,b), f_y(a,b), -1)$$

Jadi, persamaan bidang singgung adalah

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0$$

dengan $\mathbf{p} = (x, y, z)$, $\mathbf{p}_0 = (a, b, f(a,b))$ dan $\mathbf{n} = \mathbf{r}_b'(a) \times \mathbf{r}_a'(b)$.

$$\begin{aligned} (f_x(a,b), f_y(a,b), -1) \cdot ((x,y,z) - (a,b,f(a,b))) &= 0 \\ f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) &= 0 \end{aligned}$$

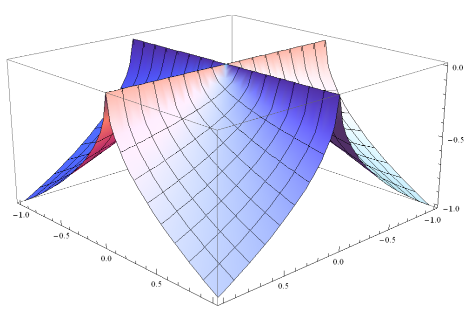
atau $z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$. Bentuk ini dapat disederhanakan sebagai

$$z(x,y) = f(a,b) + (f_x(a,b), f_y(a,b)) \cdot ((x,y) - (a,b))$$

Vektor $(f_x(a,b), f_y(a,b))$ biasa ditulis sebagai $\nabla f(a,b)$. Tulis $\mathbf{x} = (x,y)$ dan $\mathbf{x}_0 = (a,b)$, maka persamaan bidang singgung adalah

$$T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(a,b) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Fungsi $f(x,y) = -\sqrt{|xy|}$, lihat gambar berikut, mempunyai turunan parsial di $(0,0)$, tapi jelas tidak mempunyai bidang singgung di $(0,0)$. Ini merupakan kelemahan lain dari funsi yang hanya mempunya turunan parsial.



Terturunkan

setelah persamaan bidang singgung kita peroleh, kita siap untuk mengembangan pengertian konsep linear lokal pada fungsi satu peubah ke fungsi dengan dua peubah atau lebih. Kita gunakan hubungan

$$\begin{aligned} f(x) &= \overbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}^{\text{garis singgung}} + \varepsilon(x-a)(x-a) \text{ atau} \\ f(a + \Delta x) &= \overbrace{f(a) + f'(a)\Delta x}^{\text{garis singgung}} + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \end{aligned}$$

dalam konteks yang baru, memanfaatkan persamaan bidang singgung di atas sebagai berikut.

$$f(\mathbf{x_0}+\Delta\mathbf{x}) = \overbrace{f(\mathbf{x}_0)+\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\Delta\mathbf{x}}^{\text{bidang singgung}} + \varepsilon(\Delta\mathbf{x})\cdot\Delta\mathbf{x}$$

dengan $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}-\mathbf{x}_0 = (x-a, y-b) = (\Delta x, \Delta y)$.

Definition 4 *Fungsi real $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$, dikatakan **linear lokal** di $\mathbf{x}_0 = (a,b)$ jika $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ ada serta*

$$f(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x}) = \overbrace{f(\mathbf{x}_0)+\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\Delta\mathbf{x}}^{bidang\ singgung} + \varepsilon(\Delta\mathbf{x})\cdot\Delta\mathbf{x}$$

dengan

$$\varepsilon(\Delta\mathbf{x}) = (\varepsilon_1(\Delta\mathbf{x}), \varepsilon_2(\Delta\mathbf{x})), \quad \lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0}\varepsilon_1(\Delta\mathbf{x}) = \lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0}\varepsilon_2(\Delta\mathbf{x}) = 0.$$

*$\nabla f(\mathbf{x}_0)$ disebut **vektor gradien** f di $\mathbf{x}_0$.*

Definition 5 *Fungsi real $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$, dikatakan **mempunyai turunan** di $\mathbf{x}_0 = (a,b)$ jika $f(x,y)$ linear lokal di $\nabla = (a,b)$.*

Theorem 6 (Sifat-sifat ∇)

1. *$\nabla(\lambda f + \mu g)(\mathbf{x}_0) = \lambda\nabla f(\mathbf{x}_0) + \mu\nabla g(\mathbf{x}_0)$*
2. *$\nabla(fg)(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)\nabla g(\mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}_0)\nabla f(\mathbf{x}_0)$*

Jika f mempunyai turunan di $\mathbf{x}_0$, maka $f(\mathbf{x_0}+\Delta\mathbf{x}) = \overbrace{f(\mathbf{x}_0)+\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\Delta\mathbf{x}}^{\text{bidang singgung}} + \varepsilon(\Delta\mathbf{x})\cdot\Delta\mathbf{x}$. Akibatnya

$$|f(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| = |\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\Delta\mathbf{x} + \varepsilon(\Delta\mathbf{x})\cdot\Delta\mathbf{x}| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0) + \varepsilon(\Delta\mathbf{x})\| \, \|\Delta\mathbf{x}\| \tag{2}$$

Karena

$$\lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0}\varepsilon(\Delta\mathbf{x}) = \lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0}(\varepsilon_1(\Delta\mathbf{x}), \varepsilon_2(\Delta\mathbf{x})) = \left(\lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0}\varepsilon_1(\Delta\mathbf{x}), \lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0}\varepsilon_2(\Delta\mathbf{x})\right) = (0,0) = \mathbf{0},$$

maka hubungan (2) untuk $\Delta\mathbf{x}$ cukup kecil,

$$|f(\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < |\nabla f(\mathbf{x}_0) + 1| \, \|\Delta\mathbf{x}\|.$$

Maka terbukti f kontinu di $\mathbf{x}_0$.

Theorem 7 *Jika f mempunyai turunan di $\mathbf{x}_0 = (a,b)$, maka f kontinu di $\mathbf{x}_0$.*

Terbukti bahwa definisi ini cukup baik. Dapat dibuktikan bahwa dengan definisi ini, dalil rantai juga berlaku. Teorema berikut memberikan syarat yang relatif mudah untuk memeriksa bahwa suatu fungsi mempunyai turunan.

Theorem 8 *Jika turunan-turunan parsial $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$ pada sebuah cakram D yang berpusat di (a,b), maka f mempunyai turunan di (a,b).*
Proof. *Ambil sebarang $\mathbf{x} = (a+\Delta x, b+\Delta y)$ dalam cakram D. Maka*

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) = (f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a+\Delta x, b)) + (f(a+\Delta x, b) - f(a,b)).$$

Gunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk memperoleh c_1 antara b dan $b+\Delta y$ sehingga

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a+\Delta x, b) = f_y(a+\Delta x, c_1)\Delta y.$$

Dengan cara serupa, ada c_2 antara a dan $a+\Delta x$ sehingga

$$(f(a+\Delta x, b) - f(a,b)) = f_x(c_2, b)\Delta x$$

Maka

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= f_y(a+\Delta x, c_1)\Delta y + f_x(c_2, b)\Delta x \\ &= (f_y(a+\Delta x, c_1) + f_y(a,b) - f_y(a,b))\Delta y + (f_x(c_2,b) + f_x(a,b) - f_x(a,b))\Delta x \\ &= f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + (f_x(c_2,b) - f_x(a,b))\Delta x + (f_y(a+\Delta x, c_1) - f_y(a,b))\Delta y. \end{aligned}$$

Misalkan $\varepsilon_1(\Delta\mathbf{x}) = (f_x(c_2,b) - f_x(a,b))$ *dan* $\varepsilon_2(\Delta\mathbf{x}) = f_y(a+\Delta x, c_1) - f_y(a,b)$.
Karena f_x *kontinu* c_2 *antara* a *dan* $a+\Delta x$ *maka*

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (f_x(c_2,b) - f_x(a,b)) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta\mathbf{x}) = 0.$$

Demikian juga, karena f_y *kontinu dan* c_1 *antara* b *dan* $b+\Delta y$, *maka*

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_y(a+\Delta x, c_1) - f_y(a,b) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta\mathbf{x}) = 0$$

Maka terbukti bahwa f *linear lokal di* (a,b). *Oleh karena itu,* f *mempunyai turunan.* ■

Turunan Berarah

Misalkan $\mathbf{i} = (1,0)$ dan $\mathbf{j} = (0,1)$. Maka

$$\begin{aligned} f(a+\Delta x, b) - f(a,b) &= f((a,b) + (\Delta x, 0)) - f(a,b) \\ &= f((a,b) + \Delta x(1,0)) - f(a,b) \\ &= f((a,b) + \Delta x\mathbf{i}) - f(a,b) \end{aligned}$$

Jika $\mathbf{x}_0 = (a,b)$, maka

$$\begin{aligned} f_x(\mathbf{x}_0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x, b) - f(a,b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \Delta x\mathbf{i}) - f(\mathbf{x}_0)}{\Delta x} \\ f_y(\mathbf{x}_0) &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(a, b+\Delta y) - f(a,b)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \Delta y\mathbf{j}) - f(\mathbf{x}_0)}{\Delta y} \end{aligned}$$

Jadi, $f_x(\mathbf{x}_0)$ dan $f_y(\mathbf{x}_0)$ adalah turunan dalam arah yang spesial yaitu masing-masing $\mathbf{i} = (1,0)$ dan $\mathbf{j} = (0,1)$.

Konsep turunan dalam arah tertentu dapat diperoleh dengan mengganti vektor $\mathbf{i}$ dengan vektor satuan sebarang **vektor satuan u**. Jika limit ini ada,

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

f disebut mempunyai turunan di $\mathbf{x}_0$ dalam arah vektor satuan $\mathbf{u}$.

Jika f mempunyai turunan di $\mathbf{x}_0$, maka

$$f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot h\mathbf{u} + \varepsilon(h\mathbf{u})\cdot h\mathbf{u}$$

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot h\mathbf{u} + \varepsilon(h\mathbf{u})\cdot h\mathbf{u}}{h} = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u} + \varepsilon(h\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}$$

Maka

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = \lim_{h\to 0} (\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u} + \varepsilon(h\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}) \\ &= \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u} + \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \varepsilon(h\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Theorem 9 *Jika* f *mempunyai turunan di* $\mathbf{x}_0$ *dan* $\mathbf{u}$ *adalah vektor satuan, maka*

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u}.$$

dan akibatnya, karena $\|\mathbf{u}\| = 1$,

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|\cos\theta,$$

dengan θ *adalah sudut antara* $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ *dan* $\mathbf{u}$.

Remark 10 1. *Dalam arah* $\mathbf{u}$ *tegak lurus* $\nabla f(\mathbf{x}_0)$, $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = 0$.

2. *Fungsi* $f(\mathbf{x})$ *mengalami* ***kenaikan*** *nilai paling besar dalam arah searah dengan* $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ *(*$\theta = 0°$*)*

3. *Fungsi* $f(\mathbf{x})$ *mengalami* ***penurunan*** *nilai paling besar dalam arah bertolak belakang dengan* $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ *(*$\theta = 180°$*).*

Kurva Ketinggian dan Gradien

Kurva ketinggian C_k adalah proyeksi irisan permukaan $z = f(x, y)$ dengan bidang $z = k$ ke bidang xy. Jadi, sepanjang C_k, nilai f konstan yaitu k.

Misalkan C adalah kurva ketinggian yang melalui $\mathbf{x}_0$. Jika C_k mempunyai garis singgung di $\mathbf{x}_0$, dan $\mathbf{u}$ adalah vektor satuan yang sejajar dengan garis singgung tersebut, maka $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = 0$. Karena

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}$$

maka $\nabla f(\mathbf{x}_0) \perp \mathbf{u}$. Maka secara umum,

Theorem 11 *Pada tiap titik* $\mathbf{x}$*,* $\nabla f(\mathbf{x})$ *tegak lurus kurva ketinggian yang melalui* $\mathbf{x}$*.*

Berikut adalah grafik permukaan $f(x, y) = \frac{3y}{x^2+y^2+1}$, kontur serta kontur dan medan vektor gradiennya.