oki neswan FMIPA-ITB

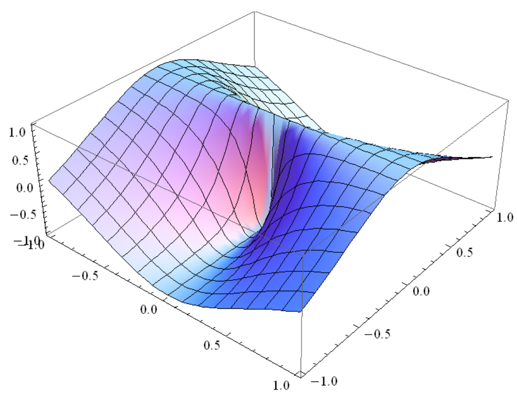
Menggunakan Kurva Ketinggian Memahami Mengapa Fungsi Tidak Memiliki Limit di (0,0)

Contoh 1

Salah satu fungsi digunakan berbagai buku kalkulus sebagai contoh fungsi yang tidak mempunyai limit di $(0,0)$ adalah fungsi

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Fungsi ini digunakan dalam **Example 2** pada buku Purcell.



Permukaan $z = f(x,y)$

Bukti bahwa fungsi ini tidak mempunyai limit di $(0,0)$ dibuktikan dengan memilih dua garis melalui $(0,0)$, misalnya garis $y = 0$ dan $y = x$. Maka sepanjang dua garis ini, kecuali di $(0,0)$, nilai fungsi masing-masing adalah konstan

$$f(x,0) = \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ dan } f(x,x) = \frac{0}{2x^2} = 0.$$

Apabila diselidiki lebih jauh, ternyata fungsi ini konstan sepanjang setiap garis-garis $y = kx$, kecuali pada $x = 0$. Jika $x \neq 0$, pada garis $y = kx$,

$$f(x,y) = f(x,kx) = \frac{x^2 - k^2x}{x^2 + k^2x^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}$$

yang berbeda untuk tiap k. Fakta ini juga dapat digunakan untuk membuktikan bahwa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ tidak ada.

Gambar yang menyertai **Example 2** pada buku Purcell juga dapat digunakan untuk menjelaskan sifat grafik fungsi ini yang dapat memberikan penjelasan lain mengapa limitnya tidak ada di $(0,0)$. Fakta bahwa

$$f(x,kx) = \frac{1-k^2}{1+k^2}$$

dapat dilihat dengan cara lain, yaitu bahwa

$$\text{tiap garis } y = kx \text{ merupakan kurva ketinggian untuk } z = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Sepintas lalu kurva-kurva ketinggian ini berpotongan di $(0,0)$ yang sebenarnya tidak mungkin terjadi. Kurva-kurva ketinggian ini tidak berpotongan karena $f(x,kx) = \frac{1-k^2}{1+k^2}$ hanya jika $x \neq 0$. Selanjutnya perspektif ini juga memberikan cara lain melihat bagaimana permukaan $z = f(x,y)$ dapat dibangun. Irisan permukaan

$z = f(z, y)$ dan bidang $z = k$ adalah garis dengan persamaan parametrik $l(t) = (t, mt, k), t \neq 0$. Titik (x, y, k) pada irisan tersebut memenuhi hubungan

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = k.$$

yang memberikan

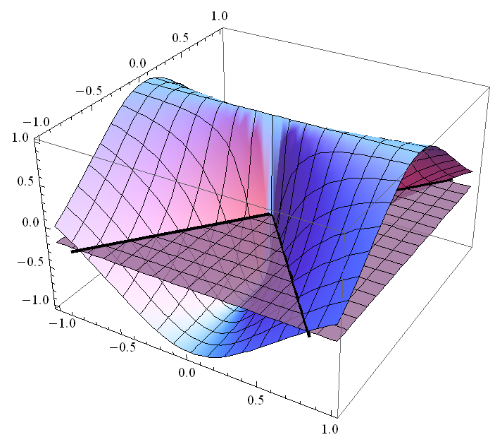
$$(1 - k)\, x^2 = (1 + k)\, y^2 \tag{1}$$

Untuk $|k| < 1$ diperoleh dua garis yaitu

$$g_{1,k}(t) = \left(t, \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}t, k\right) \text{ dan } g_{2,k}(t) = \left(t, -\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}t, k\right).$$

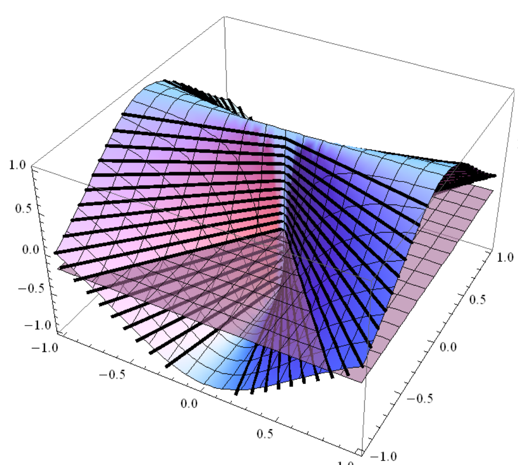
Jika $k = 1$, (1) memberikan $y^2 = 0$ yaitu sb-x. Sedangkan $k = -1$ (1) memberikan $x^2 = 0$ atau sb-y.

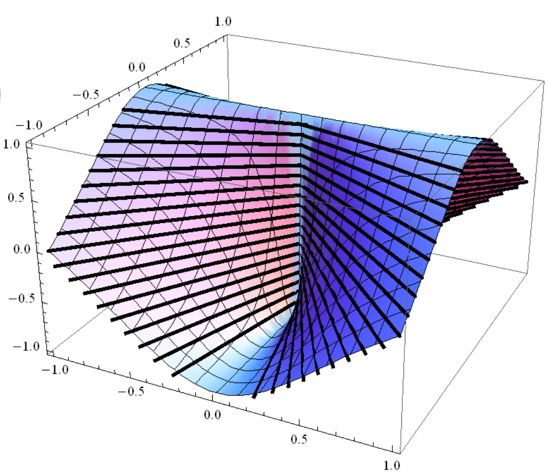
$$g_{1,1}(t) = (t, 0, 1), \quad \text{dan} \quad g_{1,-1}(t) = (0, t, -1)$$



Karena tiap titik selain $(0, 0)$ pada bidang XOY adalah anggota tepat satu garis diatas, maka tiap titik pada permukaan, kecuali $(0, 0, 0)$, berada pada tepat satu garis $g_{i,k}, i \in \{1, 2\}$. Dengan demikian, permukaan ini dapat dipandang sebagai permukaan yang dibangun oleh garis-garis

$$\{g_{1,k} : |k| < 1\} \cup \{g_{2,k} : |k| < 1\} \cup \{g_{1,1}, g_{1,-1}\}$$



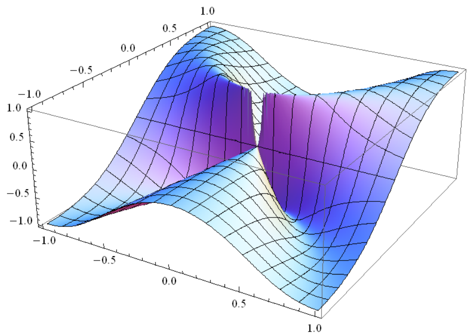


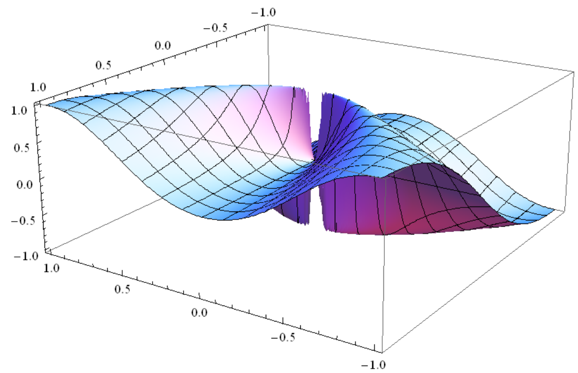
Akibatnya, di sekitar $(0, 0)$, $f(x, y)$ mengambil setiap nilai antara -1 dan 1. Ini menjelaskan mengapa $f(x, y)$ tidak mempunyai limit di $(0, 0)$

Contoh 2

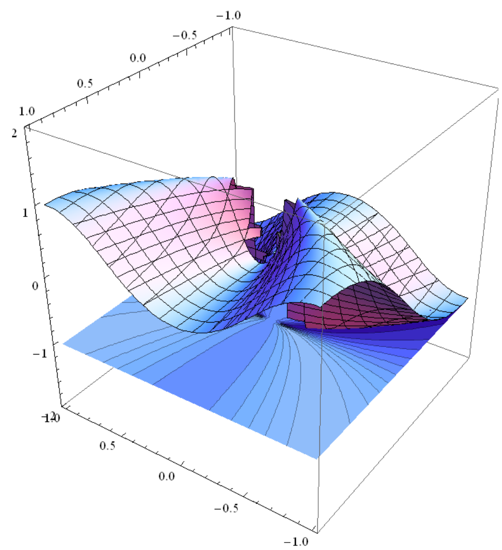
Contoh berikut menjelaskan bahwa eksistensi limit tidak cukup dengan melihat kelakuan fungsi ketika mendekati suatu titik sepanjang garis-garis. Diberi contoh fungsi yang limitnya sama ketika mendekati sebuah titik sepanjang garis-garis tetapi limit fungsi di titik tersebut sesungguhnyanya tidak ada. Fungsi yang lazim digunakan sebagai contoh adalah

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$





Grafik permukaan bersama kontur adalah sebagai berikut.



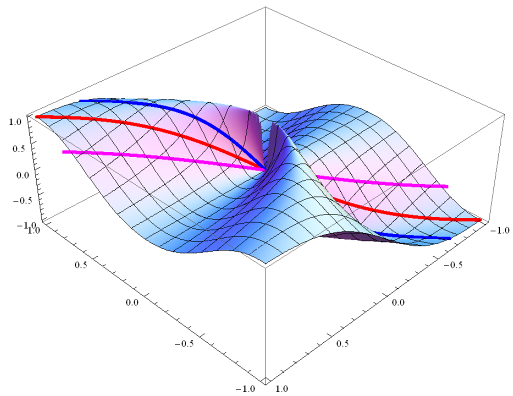
Nilai fungsi pada sebarang garis $y = kx$ adalah

$$f(x,kx) = \frac{2kx^3}{x^4 + k^2x^4} = \frac{2kx}{1+k^2}, \quad x \neq 0.$$

Ketika $x \to 0$, diperoleh

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{2kx}{1+k^2} = 0. \tag{2}$$

Gambar berikut memperlihatkan jejak pada permukaan bila kita mendekati titik $(0,0)$ sepanjang garis $y = kx$ untuk $k = \frac{2}{3}, 1$, dan $\frac{3}{2}$.



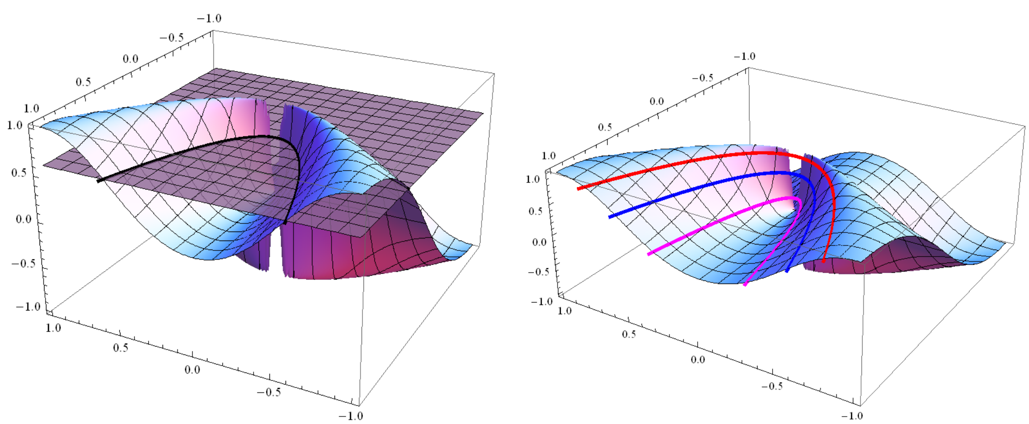
Sekalipun ini berlaku untuk tiap garis yang limitnya sepanjang garis $y = kx$ adalah sama yaitu nol tetapi tidak berarti limitnya ada, sebab sepanjang parabola-parabola $y = kx^2$,

$$f\left(x, kx^2\right) = \frac{2kx^4}{x^4 + k^2x^4} = \frac{2k}{1+k^2}. \quad x \neq 0.$$

Akibatnya,

$$\lim_{x\to 0} f\left(x, kx^2\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^4}{x^4 + k^2x^4} = \frac{2k}{1+k^2} \tag{3}$$

Gambar berikut memperlihatkan irisan permukaan dengan bidang $z = k$ untuk $k = \frac{1}{5}, \frac{3}{5}$, dan $\frac{4}{5}$.



Oleh karena itu nilai limit fungsi ketika mendekati $(0,0)$ sepanjang parabola $y = kx^2$ berbeda, tergantung pada nilai k. Ini membuktikan bahwa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{tidak ada}$$

Mahasiswa pada umumnya tidak memahami bagaimana perbedaan antara (2) dan (3) mungkin terjadi. Pemahaman mengenai bagaimana permukaan dapat dibangun dapat membantu memahami bagaimana hal ini mungkin terjadi.

Tiap titik selain $(0,0)$ pada bidang anggota tepat satu parabola $y = kx^2$, kecuali mungkin pada sb-x dan sb-y. Maka seperti halnya pada contoh di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa permukaan ini dibangun oleh parabola-parabola irisan permukaan $z = f(x,y)$ dengan bidang $z = k$, yaitu

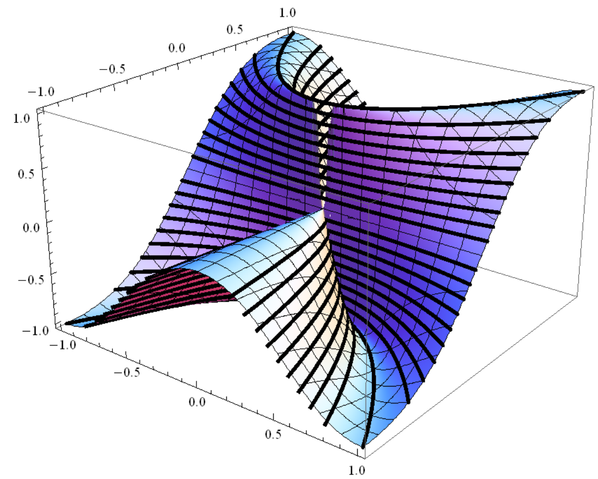
$$\{p_{1,k}(t) : |k| < 1\} \cup \{p_{2,k}(t) : |k| < 1\} \cup \{p_{1,1}(t), p_{1,-1}(t)\}$$

dengan

$$p_{1,k}\left(t\right)=\left(t,\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k}t^2,k\right),\quad p_{2,k}\left(t\right)=\left(t,\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k}t^2,k\right),\quad t\in\mathbb{R},0<|k|\leq 1.$$

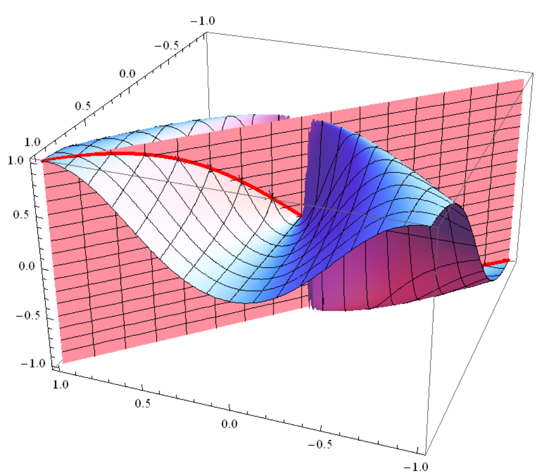
$$p_{1,0}\left(t\right)=\left(t,0,0\right),\quad p_{2,0}\left(t\right)=\left(0,t,0\right),\quad t\in\mathbb{R}$$

Khususnya $p_{1,1}\left(t\right)=p_{2,1}\left(t\right)=\left(t,t^2,1\right),p_{1,-1}\left(t\right)=p_{2,-1}\left(t\right)=\left(t,-t^2,1\right).$

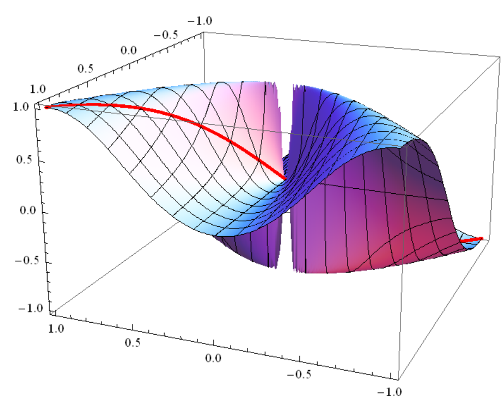


(**Catatan:** Maka, kurva-kurva ketinggian, selain sb-x dan sb-y, adalah parabola-parabola $y=\left(\frac{1\pm\sqrt{1-k^2}}{k}\right)x,\quad 0<|k|\leq 1.$)

Untuk memahami apa yang terjadi ketika mendekati titik titik $(0,0)$ sepanjang garis $y=kx$, kita memperhatikan kurva irisan bidang $y=kx$ dan permukaan $z=f\left(x,y\right)$.



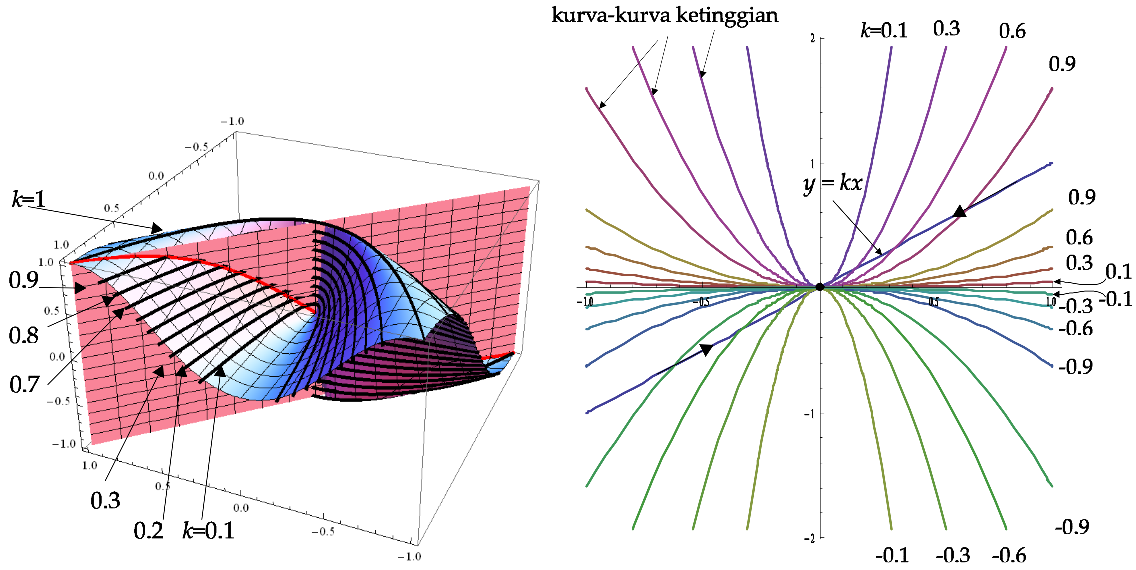
1



2

Kurva ini memotong parabola-parabola $p_{i,k}\left(t\right),i=1,2$ sehingga jika $x\to 0$, maka $k\to 0$: ketika menuju

menuju titik $(0,0)$, yaitu $x \to 0$, maka parabola-parabola $p_{i,k}$ dilalui dengan k turun menuju nol, $k \to 0$.



Gambar di atas menjelaskan mengapa hasil pada (2) dan (3) berbeda. Setiap garis