oki neswan FMIPA-ITB

Persamaan Differensial Orde-2

Persamaan diferensial orde-n adalah persamaan yang melibatkan x, y, dan turunan-turunan y, dengan yang paling tinggi adalah turunan ke-n.

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1}$$

Contoh

$$(\ln y)\, y''' + (y')^2 = \ln x$$

adalah persamaan linear orde-3. Masalah utama adalah menentukan **solusi** dari persamaan diferensial (1), yaitu fungsi $y = g(x)$ yang memenuhi (1), yaitu jika disubstitusikan untuk y, maka persamaan ini dipenuhi,

$$F\left(x, g, g', g'', \ldots, g^{(n)}\right) = 0.$$

Persamaan diferensial yang akan dibahas adalah **persamaan diferensial linear orde** 2,

$$p(x)\, y'' + q(x)\, y' + r(x)\, y = s(x) \tag{2}$$

dengan $p(x), q(x), r(x)$, dan $s(x)$ kontinu pada suatu interval buka $I = (a, b)$.

Jika $s(x) = 0$,

$$p(x)\, y'' + q(x)\, y' + r(x)\, y = 0, \tag{3}$$

maka persamaan diferensial dikatakan **homogen**. Persamaan diferensial ini selalu punya solusi karena $y(x) = 0$ pasti merupakan solusi. Solusi ini disebut **solusi trivial**.

Notasi operator: Misalkan $y^{(n)}$ ditulis sebagai $D^n y$. Maka (2) dapat ditulis sebagai

$$\underbrace{\left(p(x)\, D^2 + q(x)\, D + r(x)\right)}_{L} y = s(x) \text{ atau } Ly = s(x).$$

Juga diasumsikan bahwa $p(x)$ tidak pernah nol pada I. Secara umum,

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = k(x) \tag{4}$$

dapat ditulis sebagai

$$\underbrace{\left(a_0(x)\, D^n + a_1(x)\, D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\, D + a_n(x)\right)}_{L} y = k(x)$$

$$Ly = k(x)$$

Dari sifat kelinearan turunan, kita peroleh bahwa

$$L(cy) = cLy \text{ dan } L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$$

Jika $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ adalah dua penyelesaian dari PD homogen $L(y) = 0$, yaitu

$$Lu_1 = 0 \text{ dan } Lu_2 = 0,$$

maka untuk tiap c_1 dan c_2 bilangan real, berlaku

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L(u_1) + c_2 L(u_2) = 0$$

Theorem 1 (Prinsip Superposisi) *Jika $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ adalah dua penyelesaian dari persamaan diferensial linear homogen*

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0$$

*dan c_1, c_2 dua bilangan real, maka **kombinasi linear***

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

juga merupakan solusi persamaan diferensial tersebut.

Theorem 2 *Jika $p(x), q(x),$ dan $r(x)$ kontinu pada interval buka I, $p(x) \neq 0$ untuk tiap $x \in I$, maka persamaan diferensial linear homogen*

$$p(x)\, y'' + q(x)\, y' + r(x)\, y = 0,$$

mempunyai dua solusi $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ yang bebas linear. Selain itu, untuk tiap solusi $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ yang bebas linear, maka untuk tiap solusi $y(x)$, terdapat c_1 dan c_2 sehingga

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

Catatan: dua solusi y_1 dan y_2 disebut bebas linear jika satu adalah kelipatan dari yang lain, $y_1 = cy_2$ atau $y_2 = dy_1$.

Persamaan Diferensial Linear Orde-2 dengan Koefisien Konstan

Persamaan diferensial orde-2 dengan koefisien konstan adalah persamaan (2) dengan $p(x), q(x),$ dan $r(x)$ adalah fungsi konstan, sebut $p(x) = r, q(x) = q$, dan $r(x) = r$. Jadi,

$$py" + qy' + ry = s(x).$$

Karena $p \neq 0$, maka persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$y" + ay' + by = s(x).$$

Kita akan mulai dengan solusi jika $s(x) = 0$ atau versi homogen

Persamaan Diferensial Linear Homogen Orde-2 dengan Koefisien Konstan

Diberikan persamaan difenresial

$$\begin{aligned} y" + ay' + by &= 0, \quad a \neq 0. \qquad (5)\\ \left(D^2 + aD + b\right) y &= 0, \quad a \neq 0. \end{aligned}$$

Bila $Dy = ry$, maka

$$D^2 y = D(Dy) = D(ry) = rDy = r^2 y$$

Solusi umum dari $Dy = ry$ adalah $y(x) = Ae^{rx}$. Solusi yang paling sederhana adalah $y(x) = e^{rx}$. Jika y adalah solusi persamaan diferensial orde-1 $Dy = ry$, maka

$$\left(D^2 + aD + b\right) y = D^2 y + aDy + by = r^2 y + ary + by = \left(r^2 + ar + b\right) y.$$

Maka dapat disimpulkan bahwa jika

$$r^2 + ar + b = 0, \qquad (6)$$

maka $y(x) = e^{rx}$ juga solusi dari (5). Persamaan (6) disebut persamaan bantu (*auxilliary equation*), dan $g(r) = r^2 + ar + b$ disebut **polinom karakteristik** dari (5).. Misalkan $\Delta = a^2 - 4b$ adalah diskriminan dari persamaan bantu. terdapat diga kasus: $\Delta > 0, \Delta = 0$, dan $\Delta < 0$.

Case 3 ($\Delta > 0$) *Polinom karakteristik memiliki dua **akar tunggal** berbeda, sebut r_1 dan r_2, $r_1 \neq r_2$. Diperoleh dua akar yang bebas linear.$u_1(x) = e^{r_1 x}$ dan $u_2(x) = e^{r_2 x}$. Maka menurut Teorema di atas,*

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

adalah solusi umum (5).

Case 4 ($\Delta = 0$) *Karena $\Delta = a^2 - 4b = 0$,*

$$r^2 + ar + b = r^2 + ar + \frac{a^2}{4} = \left(r + \frac{a}{2}\right)^2 = 0$$

Maka polinom karakteristik mempunyai ***akar ganda****,*

$$r = -\frac{a}{2}$$

Diperoleh satu solusi yaitu $u(x) = e^{rx}$. *Teorema di atas memberikan bahwa terdapat dua solusi yang bebas linear. Solusi kedua* $v(x) \neq \lambda u(x)$. *Misalkan* $v(x) = xu(x) = xe^{rx}$. *Maka*

$$\begin{aligned} Dv &= e^{rx} + rxe^{rx} = (1 + rx)\, e^{rx} \\ D^2 v &= D(1 + rx)\, e^{rx} = re^{rx} + (1 + rx)\, re^{rx} = \left(r^2 x + 2r\right) e^{rx} \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned} \left(D^2 + aD + b\right) v &= D^2 v + aDv + bv = \left(\left(r^2 x + 2r\right) + a(1 + rx) + bx\right) e^{rx} \\ &= (\underbrace{\left(r^2 + ar + b\right)}_{0} x + \underbrace{(a + 2r)}_{0} e^{rx} = 0 \end{aligned}$$

Jadi, $v(x) = xe^{rx}$ *juga merupakan solusi,* $u(x)$ *dan* $v(x)$ *bebas linear. Maka solusi umum* (5) *berbentuk*

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} = (c_1 + c_2 x)\, e^{rx}$$

Case 5 $(\Delta < 0)$ *Dalam hal ini,* $\Delta = a^2 - 4b < 0$. *Maka akar-****akar*** *adalah dua bilangan* ***kompleks*** *yang saling konjugat*

$$r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a}{2} + i\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}, \qquad \text{dengan } i^2 = -1.$$

Misalkan $\alpha = \frac{-a}{2}$ *dan* $\beta = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$ *dan*

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad \text{dan} \qquad r_2 = \alpha - i\beta.$$

Ini memberikan dua solusi bebas linear

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(x) &= e^{r_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta + i\sin\beta) \\ \tilde{y}_2(x) &= e^{r_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta - i\sin\beta) \end{aligned}$$

Tetapi kedua solusi ini bernilai kompleks. Dengan menggunakan Prinsip Superposisi di atas,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{2}\tilde{y}_1(x) + \frac{1}{2}\tilde{y}_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta \\ y_2(x) &= \frac{1}{2i}\tilde{y}_1(x) - \frac{1}{2i}\tilde{y}_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta \end{aligned}$$

juga solusi dan keduanya bebas linear. Jadi, solusi umum (5) *adalah*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta + c_2\sin\beta)$$

Theorem 6 *Diberikan persamaan diferensial linear homogen orde-2 dengan koefisien konstan.*

$$y" + ay' + by = 0, \quad a \neq 0 \tag{7}$$

1. *Jika persamaan karakteristik mempunyai dua akar berbeda* r_1 *dan* r_2, *maka solusi umum* (7) *adalah*

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

2. *Jika persamaan karakteristik mempunyai hanya satu akar* $r\left(= -\frac{a}{2}\right)$, *maka solusi umum* (7) *adalah*

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}.$$

3. *Jika persamaan karakteristik mempunyai dua akar kompleks* $r_1 = \alpha + i\beta$ *dan* $r_2 = \alpha - i\beta$, *dengan* $\alpha = \frac{-a}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$, *maka solusi umum* (7) *adalah*

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta + c_2\sin\beta).$$

Persamaan Diferensial Linear Nonhomogen Orde-2 dengan Koefisien Konstan

Misalkan kita akan menentukan solusi persamaan diferensial orde-2 linear nonhomogen

$$y" + ay' + by = s(x). \tag{8}$$

dengan $s(x)$ kontinu pada suatu interval buka I. Misalkan $y_p(x)$ adalah salah satu solusi dari (8). Misalkan $y(x)$ adalah sebarang solusi lain dari (8) dan $y_h(x) = y(x) - y_p(x)$. Maka

$$y_p" + ay_p' + by_p = s(x) \qquad \text{dan} \qquad y" + ay' + by = s(x)$$

dan diperoleh

$$\begin{aligned}
(y'' + ay' + by) - \left(y_p'' + ay_p' + by_p\right) &= s(x) - s(x) = 0 \\
y'' - y_p'' + ay' - ay_p' + by - by_p &= 0 \\
\left(y'' - y_p''\right) + a\left(y' - y_p'\right) + b(y - y_p) &= 0 \\
(y - y_p)'' + a(y - y_p)' + b(y - y_p) &= 0 \\
y_h'' + ay_h' + by_h &= 0
\end{aligned}$$

Dengan demikian $y_h(x) = y(x) - y_p(x)$ adalah solusi dari versi homogen (8) :

$$y" + ay' + by = 0 \tag{9}$$

Maka, dapat disimpulkan bahwa setiap solusi $y(x)$ dari (8) berbentuk

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Theorem 7 *Solusi umum persamaan diferensial* (8) *berbentuk*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

dengan $y_h(x)$ *adalah solusi versi homogen* (9) *dan* $y_p(x)$ *adalah solusi khusus (partikular) dari* (8).

Menentukan Solusi Khusus (Partikular)

Bagaimana menentukan solusi khusus atau solusi partikular? Dua metode yang akan dibahas adalah Metode Koefisien Tak Tentu dan Metoda Variasi Parameter.

Metode Koefisien Tak Tentu Metoda ini berlaku untuk kasus-kasus khusus dari $s(x)$, yaitu jika $s(x)$ adalah merupakan polinom atau hasil kali polinom $p(x)$ dengan fungsi eksponensial atau dengan fungsi sinus atau kosinus, yaitu

$$p(x), \quad p(x)e^{rx}, \quad p(x)\sin kx, \quad p(x)\cos kx, \quad p(x)e^{rx}\sin kx, \quad p(x)e^{rx}\cos kx$$

atau jumlah dari fungsi-fungsi seperti di atas. Contoh bentuk-bentuk $s(x)$

$$1 + x, \quad e^{2x}, \quad xe^{2x}, \quad e^{2x} + \cos 2x$$

Example 8 *Tentukan solusi umum persamaan diferensial nonhomogen* $y'' + 2y' - 3y = 1 + x^2$.

Solution 9 *Persamaan versi homogennya adalah* $y'' + 2y' - 3y = 0$. *Bentuk karakteristiknya adalah* $r^2 + 2r - 3 = 0$

$$r^2 + 2r - 3 = (r + 3)(r - 1) = 0.$$

Persamaan karakteristik memiliki dua akar yaitu $r = 1$ *dan* $r = -3$. *Maka solusi homogen adalah*

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}.$$

Karena $s(x) = 1 + x^2$ adalah polinom orde 2, maka y_p juga merupakan polinom orde 2, sebab jika $y(x)$ adalah polinom orde 2, maka $y'' + 2y' - 3y$ juga polinom orde 2. Misalkan

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Maka $y' = 2Ax + B$ dan $y'' = 2A$. Jadi,

$$y'' + 2y' - 3y = 2A + 2(2Ax + B) - 3\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 1 + x^2$$

Jadi,

$$(-3A)x^2 + (4A - 3B)x + (2A + 2B - 3C) = 1 + x^2$$

yang memberikan

$$-3A = 1, \quad 4A - 3B = 0, \quad 2A + 2B - 3C = 1$$

$$\begin{aligned} 2A + 2B - 3C &= 1 \\ 4A - 3B &= 0 \\ -3A &= 1 \end{aligned}$$

Solusinya adalah $A = -\frac{1}{3}, B = -\frac{4}{9}, C = -\frac{23}{27}$. Jadi,

$$y_p(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{4x}{9} - \frac{23}{27}.$$

Maka, solusi umum adalah

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{4x}{9} - \frac{23}{27} + c_1 e^x + c_2 e^{-3x}.$$

Example 10 *Tentukan solusi khusus dari $y'' - y' = 3\cos 2x$.*

Solution 11 *Karena $s(x) = 2\cos x$, maka kita mencoba $y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$. Dengan demikian*

$$\begin{aligned} y_p' &= -2A\sin 2x + 2B\cos 2x \\ y_p'' &= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p'' - y_p' &= (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) - (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) \\ &= (-4A - 2B)\cos 2x + (2A - 4B)\sin 2x \end{aligned}$$

Sebagai solusi, $y_p'' - y_p' = 3\cos 2x$. Maka

$$(-4A - 2B)\cos 2x + (2A - 4B)\sin 2x = 3\cos 2x.$$

Maka haruslah $-4A - 2B = 3$ dan $2A - 4B = 0$ yang memberikan

$$A = -\frac{3}{5}, B = -\frac{3}{10}.$$

Maka solusi khususnya adalah

$$y_p(x) = -\frac{3}{5}\cos 2x - \frac{3}{10}\sin 2x.$$

Example 12 *Tentukan solusi khusus persamaan diferensial $y'' + 2y' - 3y = 4e^{-3x}$.*

Solution 13 *Karena $s(x) = 4e^{=3x}$, maka kita mungkin mencoba $y_p = Ae^{-3x}$. Tetapi,*

$$y_p'' + 2y_p' - 3y_p = 9Ae^{3x} - 6e^{3x} - 3A^{3x} = 0$$

Jadi,

$$0 = 4e^{-3x}$$

Ini tidak mungkin karena fungsi eksponensial tidak pernah nol. Hal ini karena persamaan karakteristik persamaan diferensial ini adalah

$$r^2 + 2r - 3 = (r+3)(r-1) = 0$$

Jadi, $r = -3$ *adalah akarnya dan oleh karena itu* e^{-3x} *adalah solusi homogen. Maka tidak mungkin* $y_p = Ae^{-3x}$*. Maka coba*

$$\begin{aligned} y_p &= Axe^{-3x}. \\ y_p' &= Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} = (1-3x)\,Ae^{-3x} \\ y_p'' &= -3Ae^{-3x} + (-3)(1-3x)\,Ae^{-3x} = (9x-6)\,Ae^{-3x} \end{aligned}$$

Substitusi pada persamaan memberikan

$$y_p'' + 2y_p' - 3y_p = (9x-6)\,Ae^{-3x} + 2\left((1-3x)\,Ae^{-3x}\right) - 3Axe^{-3x}. = -4Ae^{-3x}$$

Maka

$$-4Ae^{-3x} = 4e^{-3x}$$

Jadi, $A = -1$*. Diperoleh*

$$y_p(x) = -e^{-3x}.$$

Example 14 *Tentukan solusi khusus persamaan diferensial* $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$*.*

Solution 15 *Persamaan diferensial* $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$ *memiliki persamaan karakteristik*

$$r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0.$$

Jadi, diperoleh hanya satu akar, $r = -2$*. Maka solusi homogen adalah*

$$y_h(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} = (c_1 + c_2x)\,e^{-2x}.$$

Maka $y_p = Ae^{-2x}$ *maupun* $y_p = Axe^{-2x}$ *akan memberikan* $y_p'' + 2y_p' - 3y_p = 0$*. Kita harus memodifikasi lebih jauh lagi, yaitu*

$$y_p(x) = Ax^2e^{-2x}.$$

Jadi

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2Axe^{-2x} - 2Ax^2e^{-2x} = 2\left(Ax - Ax^2\right)e^{-2x} \\ y_p''(x) &= 2\,(A - 2Ax)\,e^{-2x} - 4\left(Ax - Ax^2\right)e^{-2x} = \left(-4x + 2x^2 + 1\right)2Ae^{-2x} \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned} 8e^{-2x} &= y_p'' + 4y_p' + 4y_p \\ &= \left(-4x + 2x^2 + 1\right)2Ae^{-2x} + 4\left(2\left(Ax - Ax^2\right)e^{-2x}\right) + 4Ax^2e^{-2x} \\ &= 2Ae^{-2x} \end{aligned}$$

Maka $A = 4$*. Jadi,*

$$y_p(x) = 4x^2e^{-2x}.$$

Example 16 *Tentukan solusi umum persamaan diferensial* $y'' - 5y' - 6y = e^{-x} - 2\cos x$

Solution 17 *Persamaan karakteristik ini adalah* $0 = r^2 - 5r - 6 = (r-6)(r+1)$*. Maka* $r = 6$ *dan* $r = -1$*. Jadi,*

$$y_h(x) = c_1e^{6x} + c_2e^{-x}.$$

Karena e^{-x} *adalah solusi homogen, maka*

$$y_p(x) = Cxe^{-x} + A\cos x + B\sin x.$$

Maka,

$$y_p'(x) = Ce^{-x} - Cxe^{-x} + B\cos x - A\sin x = C(1-x)e^{-x} + B\cos x - A\sin x$$
$$y_p''(x) = -Ce^{-x} - C(1-x)e^{-x} - B\sin x - A\cos x = (x-2)Ce^{-x} - B\sin x - A\cos x$$

Jadi,

$$\begin{aligned} e^{-x} - 7\cos x &= y_p'' - 5y_p' - 6y_p \\ &= \big((x-2)Ce^{-x} - B\sin x - A\cos x\big) - 5\big((1-x)Ce^{-x} + B\cos x - A\sin x\big) \\ &\quad - 6\left(Cxe^{-x} + A\cos x + B\sin x\right) \\ &= -7Ce^{-x} + (-7A-5B)\cos x + (5A-7B)\sin x \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned} -7C &= 1 \\ -7A - 5B &= -2 \\ 5A - 7B &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa $C = \frac{-1}{7}, A = \frac{7}{37}, B = \frac{5}{37}$. *Maka*

$$y_p(x) = -\frac{1}{7}xe^{-x} + \frac{7}{37}\cos x + \frac{5}{37}\sin x$$

Maka solusi umum adalah

$$y(x) = -\frac{1}{7}xe^{-x} + \frac{7}{37}\cos x + \frac{5}{37}\sin x + c_1e^{6x} + c_2e^{-x}.$$

Berikut adalah tabel penentuan $y_p(x)$ *persamaan diferensial*

$$y'' + ay' + by = s(x)$$

Jika salah satu suku penjumlahan dalam $s(x)$ memuat kelipatan konstan dari	dan jika	$y_p(x)$ memuat
e^{rx}	r bukan akar dari persamaan karakteristik	Ae^{rx}
	r akar tunggal dari persamaan karakteristik	Axe^{rx}
	r akar ganda dari persamaan karakteristik	Ax^2e^{rx}
$\sin kx$, $\cos kx$	ik bukan akar dari persamaan karakteristik	$A\cos kx + B\sin kx$
$ax^2 + bx + c$	0 bukan akar dari persamaan karakteristik	$Ax^2 + Bx + C$
	0 akar tunggal dari persamaan karakteristik	$Ax^3 + Bx^2 + Cx$
	0 akar ganda dari persamaan karakteristik	$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$

Metode Variasi Parameter Metode ini, sifatnya lebih umum, digunakan untuk menentukan solusi khusus dari

$$y'' + ay' + by = s(x) \tag{10}$$

dengan menggunakan solusi umum homogennya. Misalkan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ adalah dua solusi homogen yang bebas linear. Pada metode ini kita mengganti c_1 dan c_2 pada solusi homogen dengan fungsi $v_1(x)$ dan $v_2(x)$

$$y(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x) \quad \text{atau singkatnya} \quad y = v_1u_1 + v_2u_2$$

Kita tambahkan satu syarat yaitu

$$v_1'u_1 + v_2'u_2 = 0 \tag{11}$$

Maka

$$\begin{aligned} y' &= v_1u_1' + v_2u_2' \\ y'' &= v_1u_1'' + v_2u_2'' + v_1'u_1' + v_2'u_2' \end{aligned}$$

Substitusikan pada (10)

$$\begin{aligned} v_1u_1'' + v_2u_2'' + v_1'u_1' + v_2'u_2' + a\left(v_1u_1' + v_2u_2'\right) + b\left(v_1u_1 + v_2u_2\right) &= s\left(x\right) \\ v_1\underbrace{\left(u_1'' + au_1' + bu_1\right)}_{0} + v_2\underbrace{\left(u_2'' + au_2' + bu_2\right)}_{0} + \left(v_1'u_1' + v_2'u_2'\right) &= s\left(x\right) \end{aligned}$$

Karena u_1 dan u_2 solusi homogen, maka dua suku pertama adalah nol. Jadi

$$v_1'u_1' + v_2'u_2' = s\left(x\right) \tag{12}$$

Maka dari (11) dan (12), kita harus menyelesaikan sistem persamaan linear dalam v_1' dan v_2'

$$\boxed{\begin{cases} v_1'u_1 + v_2'u_2 = 0 \\ v_1'u_1' + v_2'u_2' = s\left(x\right) \end{cases}} \tag{13}$$

Solusi dalam v_1' dan v_2' adalah

$$v_1' = \frac{-u_2s}{u_2'u_1 - u_1'u_2}, \qquad v_2' = \frac{u_1s}{u_2'u_1 - u_1'u_2}$$

Maka v_1 dan v_2 ditentukan dengan integral.

Example 18 *Tentukan solusi umum* $y'' + y = \tan x$

Solution 19 *Persamaan karakteristik adalah*

$$r^2 + 1 = 0$$

dengan akar-akar kompleks $r_1 = i$ *dan* $r_2 = -i$. *Maka solusi umum homogen adalah*

$$y_h\left(x\right) = c_1\cos x + c_2\sin x.$$

Dengan $u_1 = \cos x$ *dan* $u_2 = \sin x$, *persamaan* (13) *memberikan*

$$\begin{cases} v_1'\cos x + v_2'\sin x = 0 \\ v_1'\left(-\sin x\right) + v_2'\cos x = \tan x \end{cases}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{-\sin x\tan x}{\cos x\cos x + \sin x\sin x} = -\sin x\tan x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \\ v_2' &= \frac{\cos x\tan x}{\cos x\cos x + \sin x\sin x} = \sin x \end{aligned}$$

Dengan integral

$$\begin{aligned} v_1\left(x\right) &= \int -\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = -\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx = -\int\left(\sec x - \cos x\right)dx \\ &= -\ln\left|\sec x - \tan x\right| + \sin x + C_1 \\ v_2\left(x\right) &= \int\sin x dx = -\cos x + C_2 \end{aligned}$$

Maka,

$$y_p\left(x\right) = \left(-\ln\left|\sec x + \tan x\right| + \sin x\right)\cos x + \left(-\cos x\right)\sin x = -\left(\cos x\right)\ln\left|\sec x + \tan x\right|$$

dan solusi umum adalah

$$y\left(x\right) = c_1\cos x + c_2\sin x - \left(\cos x\right)\ln\left|\sec x + \tan x\right|$$