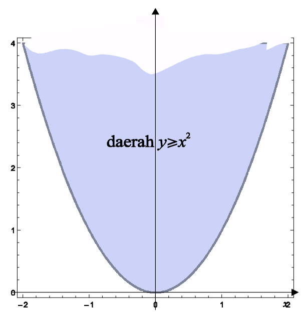
Solusi UAS Matematika 2A (30 April 2016)

Bagian A

1. Agar terdefinisi, $y \geq x^2$. Maka daerah definisi adalah daerah berarsir pada gambar:.



2. Sepanjang garis $y = mx$ limit menjadi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,(mx)}{\sqrt{x^4 + m^4 x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{\sqrt{(1+m^4)\,x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2\sqrt{1+m^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{\sqrt{1+m^4}}.$$

Karena nilai tergantung pada nilai m, maka limitnya tidak ada.

3. $F_x = \frac{2x}{x^2+4y}$ dan $F_y = \frac{4}{x^2+4y}$. Maka $F_x + F_y = \frac{2x+4}{x^2+4y}$. (Ingat $\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln|x| + C$. Maka $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$)

4. $f(x,y) = \sin \pi x \cos \pi y + \cos 2\pi y$. $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -1$, $f_x(x,y) = \pi \cos \pi x \cos \pi y$, $f_y(x,y) = -\pi \sin \pi x \sin \pi y - 2\pi \sin 2\pi y$

$$f_x\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0,\ f_y\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Maka persamaan bidang singgung yang dimaksud adalah

$$z = -1 + 0\left(x + \frac{1}{2}\right) + \pi\left(y - \frac{1}{2}\right) = -1 + \pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

5. $\nabla z = \langle x, y\rangle$. Maka $\nabla z(1,1) = \langle 1, 1\rangle$. Vektor satuan dalam arah $\langle 3, 4\rangle$ adalah $\mathbf{u} = \frac{1}{5}\langle 3,4\rangle = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\rangle$. Dengan demikian, kemiringan pendakian adalah

$$D_{\mathbf{u}} z(1,1) = \nabla z(1,1)\cdot \mathbf{u} = \langle 1,1\rangle \cdot \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\rangle = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}.$$

6. $\delta(x,y) = 6x + 2$. Maka

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_0^1\int_{-2}^2 x\,(6x+2)\,dydx}{\int_0^1\int_{-2}^2 (6x+2)\,dydx} = \frac{\int_0^1 x\,(6x+2)\int_{-2}^2 dydx}{\int_0^1 (6x+2)\int_{-2}^2 dydx} = \frac{\int_0^1 \left(6x^2+2x\right)(4)\,dx}{\int_0^1 (6x+2)(4)\,dx}$$
$$= \frac{4\left(2x^3+x^2\right)\big]_0^1}{4\left(3x^2+2x\right)\big]_0^1} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

7. Persamaan karakteristiknya $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$ mempunyai akar kembar $r = 2$. Jadi solusi persamaan homogennya $y_h(x) = (C_1 + C_2 x)\,e^{2x}$. Dengan metode koesien tak tentu, solusi tak homogen berbentuk $y_p = Ae^x$. Substitusi y_p pada persamaan diferensial memberikan

$$Ae^x - 4Ae^x + 4Ae^x = e^x.$$

dan diperoleh $A = 1$. Jadi solusi umumnya

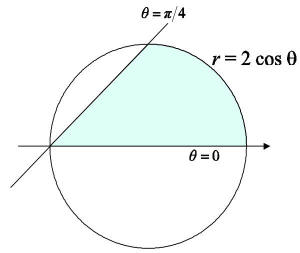
$$y = (C_1 + C_2 x)\,e^{2x} + e^x.$$

Bagian B

1. Daerah D dibatasi oleh kurva $x^2+y^2-2x=0$ atau $(x-1)^2+y^2=1$, $y=x$ dan $y=0$.

   (a) $0=x^2+y^2-2x=r^2-2r\cos\theta$ atau $r=2\cos\theta$. Garis $y=x$ adalah garis $\theta=\frac{\pi}{4}$. Maka

$$D=\left\{(r,\theta):0\le r\le 2\cos\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$$



   (b)

$$\iint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}dA=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\cos\theta}(r\sin\theta)(r)\,rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\theta)\left(\frac{r^4}{4}\Big]_0^{2\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\theta)(2\cos\theta)^4d\theta=\frac{2^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta\sin\theta d\theta=-4\left(\frac{\cos^5\theta}{5}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=-\frac{4}{5}\left(\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^5-1\right)=\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{10}$$

2. (a) Persamaan karateristik adalah $r^2+4=0$, yang mempunyai akar-akar kompleks $r=\pm 2i$. Maka solusi homogennya adalah

$$y_h(x)=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

   (b) Misalkan

$$y_p(x)=v_1(x)\cos 2x+v_2(x)\sin 2x$$

   adalah solusi partikular. Maka metode variasi parameter memberi

$$\left\{\begin{array}{c} v_1'\cos 2x+v_2'\sin 2x=0\\ -2v_1'\sin 2x+2v_2'\cos 2x=\sec 2x\end{array}\right. \tag{1}$$

$$\int\tan(2x)\,dx$$

   Maka

$$v_1'=\frac{-\sin 2x\sec 2x}{2\cos^2 2x+2\sin^2 2x}=-\frac{1}{2}\tan 2x \quad \text{dan} \quad v_2'=\frac{\cos 2x\sec 2x}{2\cos^2 2x+2\sin^2 2x}=\frac{1}{2}.$$

   (sistem persamaan (1) juga dapat diselesaikan dengan cara berikut: kalikan persamaan 1 dengan $2\sin 2x$ dan persamaan 2 dengan $\cos 2x$, diperoleh $2v_2'=1$. Substitusikan pada persamaan 2, diperoleh $v_1'\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=0$, sehingga $v_1'=-\frac{\tan 2x}{2}$)
   Jadi,

$$v_1(x)=\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|+C_1 \quad \text{dan} \quad v_2(x)=\frac{x}{2}+C_2$$

   Pilih $C_1=C_2=0$ sehingga

$$y_p(x)=\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x$$

Maka.solusi umum adalah

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x \\ &= \left(A + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\right)\cos 2x + \left(B + \frac{x}{2}\right)\sin 2x \end{aligned}$$

3. **(Cara 1)**

Dari fungsi kendala didapat $z^2 = 4 - x^2 - y^2$ sehingga kita cukup mencari nilai ekstrim dari

$$\begin{aligned} T(x,y) &= 100 + 40xyz^2 = 100 + 160xy - 40x^3y - 40xy^3 \\ T_x(x,y) &= 160y - 120x^2y - 40y^3 = 40y\left(4 - 3x^2 - y^2\right) \\ T_y(x,y) &= 160x - 120y^2x - 40x^3 = 40x\left(4 - x^2 - 3y^2\right) \end{aligned}$$

Karena $x, y \neq 0$, maka $T_x = 0$ dan $T_y = 0$ memberikan

$$4 - 3x^2 - y^2 = 0 \tag{2}$$

$$4 - x^2 - 3y^2 = 0 \tag{3}$$

Diperoleh $4 = 3x^2 + y^2 = 3y^2 + x^2$ atau $x^2 = y^2$ sehingga

$$y = \pm x$$

Substitusi pada persamaan (2) memberikan $4 - 4x^2 = 4(1-x)(1+x) = 0$. Maka $x = \pm 1$. Karena $y = \pm x$, diperoleh empat titik $(1,1), (1,-1), (-1,-1), (-1,1)$.

$$T(1,1) = T(-1,-1) = 180 \quad \text{dan} \quad T(1,-1) = T(1,-1) = 20$$

Jadi, temperatur maksimum adalah $180°$ terjadi pada titik $\left(1,1,\sqrt{2}\right), \left(1,1,-\sqrt{2}\right), \left(-1,-1,\sqrt{2}\right), \left(-1,-1,-\sqrt{2}\right)$ dan temperatur minimum adalah $20°$ terjadi pada titik $\left(1,-1,\sqrt{2}\right), \left(1,-1,-\sqrt{2}\right), \left(-1,1,\sqrt{2}\right), \left(-1,1,-\sqrt{2}\right)$.

(Cara 2)

Fungfi objektif adalah $T(x,y,z) = 100 + 40xyz^2$ dan fungsi kendala adalah $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$.

$$\begin{aligned} \nabla T &= \lambda \nabla g \\ \left(40yz^2, 40xz^2, 80xyz\right) &= \lambda(2x, 2y, 2z) \end{aligned}$$

Diperoleh

$$20yz^2 = \lambda x \tag{4}$$

$$20xz^2 = \lambda y \tag{5}$$

$$40xyz = \lambda z \tag{6}$$

Kalikan (4) dengan y dan (5) dengan x, diperoleh

$$20y^2z^2 = 20x^2z^2 = \lambda xy$$

Maka $y^2 = x^2$ atau $z = 0$.

Misalkan $z = 0$. Maka kendala memberikan $x^2 + y^2 = 4$. Diperoleh titik-titik pada lingkaran tersebut kecuali $(0, \pm 2)$ dan $(\pm 2, 0)$ karena $x \neq 0, y \neq 0$.

Misalkan $y^2 = x^2$ dan $z \neq 0$. Maka (6) memberikan $\lambda = 40xy$. Kalikan kedua ruas (4) dengan y memberikan

$$\begin{aligned} 20y^2z^2 &= \lambda xy = 40x^2y^2 \\ 20y^2z^2 &= 40x^2y^2 \\ z^2 &= 2x^2 \end{aligned}$$

Maka dari kendala diperoleh $4x^2 = 4$, $x = \pm 1$. Karena $y = \pm x$, diperoleh delapan titik

$$\begin{gathered}\left(1,1,\sqrt{2}\right),\left(1,1,-\sqrt{2}\right),\left(1,-1,\sqrt{2}\right),\left(1,-1,-\sqrt{2}\right),\\ \left(-1,1,\sqrt{2}\right),\left(-1,1,-\sqrt{2}\right),\left(-1,-1,\sqrt{2}\right),\left(-1,-1,-\sqrt{2}\right)\end{gathered}$$

Hitung nilai pada semua titik yang diperoleh

$$\begin{aligned} T\left(1,1,\sqrt{2}\right) = T\left(1,1,-\sqrt{2}\right) = T\left(-1,-1,\sqrt{2}\right) = T\left(-1,-1,-\sqrt{2}\right) &= 180 \\ T\left(1,-1,\sqrt{2}\right) = T\left(1,-1,-\sqrt{2}\right) = T\left(-1,1,\sqrt{2}\right) = T\left(-1,1,-\sqrt{2}\right) &= 20 \end{aligned}$$

Pada lingkaran $x^2 + y^2 = 4, T(x, y, z) = 100,$ karena $z = 0$.

Jadi, temperatur maksimum adalah $180°$ terjadi pada titik $\left(1,1,\sqrt{2}\right),\left(1,1,-\sqrt{2}\right),\left(-1,-1,\sqrt{2}\right),\left(-1,-1,-\sqrt{2}\right)$ dan temperatur minimum adalah $20°$ terjadi pada titik $\left(1,-1,\sqrt{2}\right),\left(1,-1,-\sqrt{2}\right),\left(-1,1,\sqrt{2}\right),\left(-1,1,-\sqrt{2}\right)$.