Jawab UTS MA1201 Matematika 2A

Sabtu, 19 Maret 2016

Bagian A

1. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

2. $\int \frac{4}{(1-x)(3+x)} dx = \int \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}\right) dx = \ln(x+3) - \ln(x-1) + C$

3. $\lim_{x\to 0}(1 + a\sin x)^{\csc x} = e^2$. Misalkan $y(x) = (1 + a\sin x)^{\csc x}$. Maka $\ln y = \csc x \ln(1 + a\sin x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+a\sin x)}{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + a\sin x)}{\sin x} \overset{l'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+a\sin x}\times a\cos x}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{a}{1 + a\sin x} = a.$$

Maka $\lim_{x\to 0}(1 + a\sin x)^{\csc x} = e^a$. Jadi pilih $a = 2$.

4. $\int_{-2}^{0}\frac{2dx}{x^2+4x+4} = \lim_{a\to -2^+}\int_a^0 \frac{2}{(x+2)^2} = \lim_{a\to -2^+}\int_a^0 \frac{2d(x+2)}{(x+2)^2} = \lim_{a\to -2^+}\left.\frac{-2}{x+2}\right]_a^0 = \frac{-2}{2} - \lim_{a\to -2^+}\frac{-2}{a+2} = \infty$. Divergen.

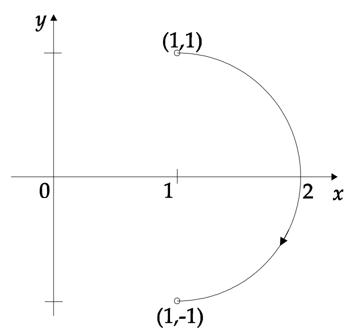
5. Misalkan $x = 1 + \sin t$ dan $y = \cos t, 0 \le t \le \pi$. Jadi, $\sin t \ge 0$. Jadi, $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-y^2}$. Jadi, persamaan cartesius adalah

$$x = 1 + \sqrt{1-y^2}$$

Untuk memperoleh kurva, dicari bentuk lain hubungan antara x dan y :

$$1 = \sin^2 t + \cos^2 t = (x-1)^2 + y^2.$$

Jadi, kurva adalah bagian dari lingkaran dengan pusat $(1,0)$ dan radius 1. Dari $x = 1 + \sqrt{1-y^2} \ge 1$ dan $-1 \le y \le 1$ diperoleh indikasi bahwa kurva adalah setengah lingkaran sebelah kanan garis $x = 1$. dengan orientasi dari titik $(1,1)$ menuju titik $(1,-1)$.



6. Untuk $n \ge 1, e^{\frac{1}{n}} \le e^1$. Maka

$$0 \le \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \le \frac{e}{n^2}.$$

Deret $\sum_1^\infty \frac{e}{n^2}$ konvergen karena merupakan deret$-p$ dengan $p = 2$. Maka $\sum_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ juga konvergen menurut Uji Banding Langsung. Uji Banding Limit dan Uji Integral juga dapat digunakan untuk memeriksa kekonvergenannya.

7. $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^n}$. Misalkan $a_n(x) = \frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}}\right|}{\left|\frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|}{2} = \frac{|x-2|}{2}.$$

Maka radius kekonvergenan adalah 2.

Bagian B

1. (a)

$$\frac{1}{1+4x^2} = \frac{1}{1-(-4x^2)} = 1 + \left(-4x^2\right) + \left(-4x^2\right)^2 + \left(-4x^2\right)^3 + \left(-4x^2\right)^4 - + \cdots$$
$$= 1 - 4x^2 + 16x^4 - 64x^6 + 256x^8 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n}$$

dengan syarat $\left|\left(-4x^2\right)\right| = 4x^2 < 1$ atau $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

(b) Misalkan

$$g(x) = \int \frac{1}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+(2x)^2} d(2x) = \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x)$$

Polinom MacLaurin derajat 3 dari $g(x)$ adalah

$$P_3(x) = \int_0^x \left(1 - 4t^2\right) dt = x - \frac{4}{3} x^3$$

Jadi, $\tan^{-1}(0.2) = 2g(0.1) \approx 2P_3(0.1) = 2\left(0.1 - \frac{4}{3} \times (0.1)^3\right) = 0.197\,33....$

2. $f(x) = xe^{-x}, x \geq 1$.

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

(b) $\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b xe^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \left(-xe^{-x}\right]_1^b + \int_1^b e^{-x} dx\Big) = \lim_{b\to\infty} \frac{-x}{e^b} - \frac{-1}{e} - \lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^b} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}$

(a) $B'(2, -8, 14)$

(b) $l(t) = A + tAB' = (7,2,4) + t((2,-8,14) - (7,2,4)) = (7,2,4) + t(-5,-10,-10) = (7-5t, 2-10t, 4+10t).$
Titik C adalah titik potong garis AB' dan bidang XZ, yaitu bidang $y = 0$.

$$y(t) = 2 - 10t = 0 \text{ untuk } t = \frac{1}{5}.$$

Maka titik C adalah

$$l\left(\frac{1}{5}\right) = \left(7 - 5\frac{1}{5}, 2 - 10\frac{1}{5}, 4 + 10\frac{1}{5}\right) = (6, 0, 6)$$

(c) Pilih sebagai normal bidang XZ adalah $\mathbf{n} = (0,1,0)$. Misalkan α dan β adalah masing-masing sudut antara $\mathbf{n}$ dengan garis AC dan $B'C$. Maka

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CA}}{\|\mathbf{n}\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(0,1,0)\cdot(1,2,-2)}{1 \times \sqrt{1+4+4}} = \frac{2}{3}.$$
$$\cos\beta = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB}}{\|\mathbf{n}\| \left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{(0,1,0)\cdot(-4,8,8)}{1 \times \sqrt{16+64+64}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Maka $\alpha = \beta$. Jadi, $T = C$.