SOAL LATIHAN BAB TURUNAN DI RUANG BERDIMENSI N

MA1201 MATEMATIKA 2A SEMESTER 2 2015/2016

Selesaikanlah soal-soal berikut:

(1) Untuk fungsi-fungsi di bawah ini, tentukan daerah definisi dan sketsalah grafiknya.
 (a) $f(x,y) = -2$
 (b) $f(x,y) = 9 - x - 3y$
 (c) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - 4y^2}$
 (d) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

(2) Sketsalah kurva ketinggian $z = k$ berikut ini untuk nilai k yang diberikan.
 (a) $z = \sqrt{25 - x^2 + 4y^2}$; $k = 1, 4, 9, 16$
 (b) $z = \dfrac{x}{y}$; $k = -2, -1, 0, 1, 2$
 (c) $z = y - \sin x$; $k = -1, 0, 1, 2$

(3) Misalkan $T(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ merupakan fungsi yang menyatakan temperatur di titik (x,y) dengan $(x,y) \neq (0,0)$. Sketsalah kurva-kurva isothermal (kurva yang memuat titik bertemperatur sama) untuk $T = 0, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{2}$.

(4) Tentukan semua turunan parsial pertama dari fungsi-fungsi di bawah ini.
 (a) $f(x,y) = e^x \sin y$
 (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2+y^2}}$
 (c) $f(x,y) = \ln\left(x^2 - y^2\right)$

(5) Tentukan gradien garis singgung sebuah kurva yang merupakan hasil perpotongan permukaan $z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ dan bidang $y = 2$ pada titik $\left(-1, 2, \sqrt{11}\right)$.

(6) Seekor lebah terbang sepanjang kurva hasil perpotongan permukaan $z = x^4 + xy^3 + 12$ dengan bidang $x = 1$. Pada titik $(1, -2, 5)$, lebah tersebut meninggalkan kurva untuk selanjutnya terbang sepanjang garis singgungnya. Di titik manakah pada bidang-xy, lebah tersebut hinggap?

(7) Misalkan $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + cx^2 + y^2$.
 (a) Hitunglah semua turunan parsial kedua dari f.
 (b) Tentukan konstanta c agar fungsi f memenuhi persamaan $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

(8) Carilah limit-limit berikut, jika ada.
 (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,\pi)} \frac{x\cos(y)}{2x+y^3}$
 (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$
 (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{y-2x^2}$
 (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$

(9) Tunjukkan bahwa limit berikut tidak ada.
 (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$
 (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$
 (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(10) Tentukan himpunan terbesar dimana f kontinu.
 (a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x+y}}$
 (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{xy}, & \text{untuk } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{untuk } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(11) Diketahui $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4y^2}{x-2y}, & \text{jika } x \neq 2y \\ g(x), & \text{jika } x = 2y \end{cases}$.
 Jika f kontinu di setiap titik di $\mathbb{R}^2$, tentukan suatu rumus bagi fungsi g.

(12) Selidiki apakah fungsi-fungsi berikut terdiferensialkan di titik P yang diberikan.
 (a) $f(x,y) = e^x \cos y$; $P\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.
 (b) $f(x,y) = \dfrac{5}{x+y}$; $P(0,1)$.

(13) Carilah ∇f di titik P, kemudian tentukan persamaan bidang singgung di titik tersebut.
 (a) $f(x,y) = \sin^3\left(x^2y\right)$, $\quad P\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
 (b) $f(x,y) = xe^{xy}$, $\quad P\,(1,0)$

(14) Tentukan semua titik (x,y), agar bidang singgung dari fungsi $z = x^3$ di titik tersebut, horisontal.

(15) Jika $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2$, tentukanlah turunan berarah dari f di titik $(1,-1)$ dalam arah $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

(16) Tentukan vektor satuan yang menjadi arah bagi $f(x,y) = e^y \sin x$ di titik $P\left(\dfrac{5\pi}{6}, 0\right)$ sehingga nilai f naik paling cepat. Tentukan

pula laju perubahan nilai f di titik P dalam arah tersebut.

(17) Ketinggian suatu gunung di atas permukaan laut di titik (x, y) diberikan oleh fungsi f. Seorang pendaki gunung yang berada pada titik P mencatat bahwa kemiringan gunung dalam arah timur adalah $-\frac{1}{2}$ dan dalam arah utara $-\frac{1}{4}$. Tentukan arah gerak pendaki gunung tersebut sehingga ia turun paling cepat dibandingkan jika ia memilih arah lain.

(18) Tentukanlah $\frac{dw}{dt}$ dalam t dengan menggunakan Aturan Rantai.

a. $w = \ln\left(\frac{x}{y}\right),\ x = \tan t,\ y = \sec^2 t.$

b. $w = \sin(xyz^2),\ x = t^3,\ y = t^2,\ z = t.$

(19) Tentukanlah $\frac{\partial w}{\partial t}$ dalam s dan t dengan menggunakan Aturan Rantai, kemudian tentukanlah $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{s=a,\, t=b}$ untuk a dan b yang diberikan.

a. $w = x^2 y$, $x = st$, $y = s - t$;
$a = 2$, $b = -1$.

b. $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x = \cos(st)$, $y = \sin(st)$,
$z = s^2 t$; $a = \pi$, $b = \frac{1}{2}$.

(20) Temperatur pada suatu pelat baja di titik (x, y) adalah e^{-x-3y} derajat Celcius. Seekor serangga berjalan ke arah timur laut dengan kecepatan $\sqrt{8}$ kaki per menit $\left(\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 2\right)$. Bagaimanakah perubahan temperatur terhadap waktu menurut serangga tersebut, ketika ia melalui titik asal?

(21) Tentukan persamaan bidang singgung dari permukaan berikut di titik P.

a. $x^2 + y^2 - z^2 = 4,\ P(2, 1, 1).$

b. $z - xe^{-2y} = 0,\ P(1, 0, 1)$

(22) Tunjukkan bahwa permukaan $x^2 + 4y + z^2 = 0$ dan $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 7 = 0$ bersinggungan di titik $(0, -1, 2)$. (*Petunjuk: Perlihatkan bahwa kedua permukaan mempunyai bidang singgung yang sama di titik tersebut.*)

(23) Rumus $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ menyatakan hubungan antara tahanan total pada suatu rangkaian dua resistor yang disusun secara paralel, R, dengan tahanan resistor-resistor pembentuknya (R_1 dan R_2). Misalkan $R_1 = 25 ohm$ dan $R_2 = 100 ohm$ dengan kesalahan pengukuran masing-masing $0.5 ohm$. Hitunglah R dan kesalahan maksimum dari nilai R tersebut.

(24) Sebuah kerucut diukur jari-jari dan tingginya. Kesalahan terbesar yang mungkin dilakukan dalam mengukur jari-jari adalah 2% dan tinggi 3%. Gunakan diferensial untuk menghitung persentase kesalahan terbesar yang mungkin dilakukan dalam menghitung volume kerucut tersebut.

(25) Untuk fungsi $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, tentukan hampiran Taylor orde dua di sekitar titik $(3, 4)$ untuk $f(x, y)$. Kemudian carilah nilai hampiran $f\left(\frac{31}{10}, \frac{39}{10}\right)$ dengan menggunakan

a. hampiran Taylor orde satu

b. hampiran Taylor orde dua

c. kalkulator

(26) Untuk fungsi-fungsi berikut ini, carilah semua titik kritisnya dan tentukan jenis titik kritis tersebut (maksimum, minimum , atau pelana).

a. $f(x, y) = xy^2 - 6x^2 - 3y^2.$

b. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2-4y)}.$

c. $f(x, y) = x^2 + a^2 - 2ax \cos y$
untuk $-\pi < y < \pi$ dengan a konstanta.

(27) Tentukan nilai maksimum dan minimum global dari fungsi $f(x, y) = x^2 - 6x + y^2 - 8y + 7$ pada himpunan $S = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(28) Diketahui sebuah balok yang sisi-sisinya paralel dengan bidang-bidang koordinat, berada di dalam elipsoida $9x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 36$. Berapakah volume terbesar dari balok tersebut?

(29) Temperatur pada sebuah cakram $\{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$ di titik (x, y) diberikan oleh $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$. Tentukan titik terpanas dan terdingin pada cakram tersebut.

(30) Tentukan nilai maksimum dari fungsi

$$f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$$

dengan kendala $xy - 3 = 0$.

(31) Tentukan nilai minimum dari fungsi

$$f(x, y) = 4x - 2y + 3z$$

dengan kendala $2x^2 + y^2 - 3z = 0$.

(32) Tentukan jarak terkecil dari titik asal, $O(0, 0, 0)$, ke permukaan $x^2 y - z^2 + 9 = 0$.